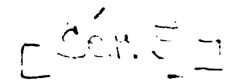




MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES SCIENCES
DE
ST. PÉTERSBOURG.



TOME XI.



ST. PÉTERSBOURG.

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

1830.

MÉMOIRES POSTHUMES

DE

L. EULER, F. T. SCHUBERT & N. FUSS

CI - DEVANT

MEMBRES DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST. PÉTERSBOURG.

(Avec une planche.)

ST. PÉTERSBOURG

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

1 8 3 0.

Se vend chez Graeff, Commissionnaire de l'Académie, place de l'Amirauté maison de Stcherbakoff N°. 91. et à Leipsic chez Cnobloch.

(Prix 10 R°. pour la Russie et 16 R°. pour l'étranger.)

Publié avec approbation de l'Académie.

St. Pétersbourg
ce 30. Juillet 1829

Le Secrétaire perpétuel: *P. H. Fuss.*

AVANT-PROPOS.

Lorsqu'en 1826, époque de sa fête séculaire, l'Académie prit la résolution de faire commencer avec le nouveau siècle de son existence, une nouvelle série de ses Mémoires, elle arrêta en même temps de publier dans un volume à part, formant le supplément de la série qui venait d'être terminée, tous les mémoires posthumes qui se trouvaient dans ses archives, et dont la publication avait été décrétée du vivant des auteurs. A ce nombre appartenaient les mémoires encore inédits d'*Euler*. On sait que ce grand homme avait désiré que les volumes du recueil académique pussent contenir de ses mémoires encore quarante ans après sa mort. Il ne s'agit pas ici de discuter si l'Académie a eu tort ou non de se conformer aussi strictement à la volonté du plus grand Géomètre qu'elle ait eu le bonheur de possèder. Le fait est que le nombre de ses mémoires posthumes a suffi non seulement pour en remplir, immédiatement après sa mort arrivée en 1783, trois gros volumes in 4°. (Les Opuscula Analytica et le 4me volume de la 2de édition de ses Institutiones Calculi integralis), mais encore pour en orner les vingt-cinq volumes des *Nova Acta* et des *Mémoires* qui ont paru depuis cette époque, et en 1823, à l'é-

chéanee du terme de 40 ans il en restait encore quatorze aux archives, que l'Académie offre actuellement au public dans ce volume. A ces mémoires on en a joint quatre de *Schubert* et treize de *N. Fufs*.

Pour le format et les caractères, on a cru devoir se conformer à l'ancienne série dont ce volume est le dernier.

TABLE DES MATIÈRES.

Mémoires d'*Euler*:

Mémoires de *Schubert*:

Mémoires de *Fuſs*:

COMMENTATIONES

Cel. - L. EULERI.

I.

DE INSIGNI PROMOTIONE

ANALYSIS DIOPHANTAEAE.

Conventui exhibita die 12. Junii 1780.

§. 1.

Quando in Analysi Diophantaea ad formulas biquadraticas, quadrato aequandas, pervenitur, methodus eas tractandi adhuc parum est exculta et nimis taediosas ambages requirit, quando plures solutiones desideramus. Qualibet enim solutione inventa formula biquadratica per substitutionem continuo in alias formas transmutari debet, quibus operationibus mox ad tam enormes numeros pervenitur, ut vix quicquam tantum laborem suscipere voluerit.

§. 2. Cum igitur nuper pro Problemate notissimo, quo duo numeri requiruntur, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum, in solutionem satis commodam et cocinnam incidissem, mox perspexi, eandem methodum multo magis generalem reddi posse. Semper enim in usum vocari poterit, quoties talis formula biquadratica ad quadratum reducenda proponitur:

$$aax^4 + 2abx^3y + cxxyy + 2bdxy^3 + ddy^4 = \square.$$

Quia enim ad hanc formam reduci potest:

$$(axx + bxy + dyy)^2 + (c - bb - 2ad)\, xxyy$$

ponamus brevitatis gratia $c - bb - 2ad = mn$ ut habeamus

$$(axx + bxy + dyy)^2 + mnx^2y^2 = \square$$

huic satisfiet, statuendo

$$axx + bxy + dyy = \lambda(mpp - nqq) \text{ et } xy = 2\lambda pq$$

tum enim nostra formula evadet quadratum, scilicet $\lambda\lambda(mpp + nqq)^2$; ubi notetur, quo plures numerus mn habeat factores, eo pluribus modis hanc expressionem immutari posse.

§. 3. Hic omnes numeros m, n, p, q, tanquam integros spectamus; sin autem fractos admittere velimus, loco y unitatem scribere licebit, sicque erit $x = 2\lambda pq$, qui valor in praecedente aequatione substitutus praebet

$$4\lambda\lambda appqq + 2\lambda bpq + d = \lambda mpp - \lambda nqq,$$

quae aequatio cum sit quadratica respectu utriusque litterae p et q, pro utraque radicem extrahendo inveniemus has duas formulas:

$$p = \frac{-\lambda bq \pm \sqrt{\lambda md + \lambda\lambda qq(bb - 4ad + mn) - 4\lambda^3 naq^4}}{4\lambda\lambda aqq - \lambda m}$$

$$q = \frac{-\lambda bp \pm \sqrt{-\lambda nd + \lambda\lambda(bb - 4ad + mn)pp + 4\lambda^3 amp^4}}{4\lambda\lambda app + \lambda n}.$$

§. 4. Quia littera λ nostro arbitrio est relicta haud difficile erit ei talem valorem tribuere, ut in altera saltem formula extractio radicis quadratae succedat, quam si fuerimus nacti, ita ut pro p et q determinatos valores impetravimus, inde sequenti modo plures alios valores, atque adeo infinitos eruere licebit. Sint enim p et q valores inventi atque ob ambiguitatem signi radicalis pro p simul alius valor innotescit, qui si ponatur p' erit $p + p' = \frac{-2bq}{4\lambda aqq - m}$. Hic jam valor p' in altera formula loco p substitutus dabit quoque novum valorem pro q, qui sit q', eritque simili modo

$$q + q' = \frac{-2bp}{4\lambda app + n}.$$

Neque vero opus est, istam alteram substitutionem facere, cum inventio novorum valorum pro p et q sequenti modo facillime expediri queat.

§. 5. Simul enim atque duos valores p et q fuerimus nacti, inde statim sequens series assignari poterit: $p, q, p', q', p'', q'', p''', q'''$, etc. cum sit

$$p' = \frac{-2bq}{4\lambda aqq - m} - p; \quad q' = \frac{-2bp'}{4\lambda ap'p' + n} - q$$
$$p'' = \frac{-2bq'}{4\lambda aq'q' - m} - p'; \quad q'' = \frac{-2bp''}{4\lambda ap''p'' + n} - q'$$
$$p''' = \frac{-2bq''}{4\lambda aq''q'' - m} - p''; \quad q''' = \frac{-2bp'''}{4\lambda ap'''p''' + n} - q''$$

etc. etc.

§. 6. Quin etiam ambas litteras p et q permutare possumus, ut obtineamus hanc seriem: q, p, q', p', q'', p'', etc., ubi iterum erit:

$$q' = \frac{-2bp}{4\lambda app + n} - q; \quad p' = \frac{-2bq'}{4\lambda aq'q' - m} - p$$
$$q'' = \frac{-2bp'}{4\lambda ap'p' + n} - q'; \quad p'' = \frac{-2bq''}{4\lambda aq''q'' - m} - p'$$

etc. etc.

sicque sine ulla transformatione et substitutione ex binis valoribus initio cognitis p et q, quotcunque libuerit, alios valores elicere poterimus, quorum adeo lex progressionis innotescit. Unde patet hanc methodum vulgari plurimum antecellere.

§. 7. Inventa autem tali serie litterarum p et q binis quibuslibet conjungendis adipiscemur totidem valores idoneos pro ipsa littera quaesita x quippe cujus valores ex priori serie erunt

$2\lambda pq$; $2\lambda qp'$; $2\lambda p'q'$; $2\lambda q'p''$; etc.

ex altera vero serie valores ipsius x erunt

$2\lambda qp$; $2\lambda pq'$; $2\lambda q'p'$; $2\lambda p'q''$; etc.

posito scilicet $y = 1$; unde patet, si illi valores fuerint fractio-

nes, earum denominatores pro y assumi posse, dum soli numeratores ipsi x tribuuntur.

§. 8. Totum ergo negotium eo redit, ut bini saltem valores initiales p et q investigentur, id quod plerumque facile fieri poterit, quia littera λ a lubitu nostro pendet. Interim tamen tales valores initiales ex ipsa formula biquadratica per methodum vulgarem derivari poterunt. Sumto enim $y = 1$ hujus formulae biquadraticae:

$$aax^4 + 2abx^3 + cxx + 2bdx + dd$$

radix statuat $axx + bx - d$ et calculo subducto fiet

$$x = \frac{4bd}{bb - 2ad - c} = \frac{-4bd}{mn + 4ad} \text{ ob } c = mn + bb + 2ad.$$

Simili modo posita radice $axx - bx - d$ fiet

$$x = \frac{bb - 2ad - c}{4ab} = \frac{-mn - 4ad}{4ab}.$$

§. 9. Iidem valores alio quoque modo obtineri possunt. Posita enim radice $axx + bx + \frac{c - bb}{2a}$, colligitur $x = \frac{-mn - 4ad}{4ab}$, quae cum praecedentium posteriore convenit. Simili modo si radix fingeretur $d + bx + \frac{c - bb}{2d} xx$ foret $x = \frac{-4bd}{mn + 4ad}$, prior valor §. praecedentis. Interim tamen duobus valoribus inventis annumerari possunt etiam hi: $x = 0$ et $y = 0$, unde autem raro aliquid deduci potest.

§. 10. Invento autem valore idoneo pro x manente $y = 1$ haud difficulter pro eo litterae p et q reperiri poterunt. Cum enim posuerimus $axx + bx + d = \lambda (mpp - nqq)$ et $x = 2\lambda pq$ erit $\frac{axx + bx + d}{x} = \frac{mpp - nqq}{2pq}$. Ex cognito ergo valore fiat

$$\frac{axx + bx + d}{x} = A,$$

ut habeamus $mpp - nqq = 2Apq$, colligitur $\frac{p}{q} = \frac{A + \sqrt{AA + mn}}{m}$, ubi radix certo extrahi poterit, unde oriatur fractio $\frac{f}{g} = \frac{p}{q}$. Sum-

to igitur $p = f$ et $q = g$ sponte patescet quid pro λ accipi debeat ut fiat $2\lambda pq = x$ hincque statim binae series memoratae formari poterunt. Ceterum superfluum foret hanc methodum per exempla illustrare, quia insignis casus jam in dissertatione praecedente (*), accurate est pertractatus.

§. 11. Etsi formula hic tractata non parum restricta videtur, tamen plurimae aliae formulae maxime discrepantes ope idoneae substitutionis ad eam reduci possunt, cujusmodi est ista satis generalis $\alpha A^4 \pm \beta B^4 = \square$, vel posito $\frac{A}{B} = C$ haec simplicior $\alpha C^4 \pm \beta = \square$, dummodo casus praesto sit, quo ea fit quadratum, veluti casu $C = 1$, ita ut tum sit $\alpha \pm \beta = \square$. Omnes autem hujusmodi formulae ad nostram formam reducentur ope substitutionis $C = \frac{1+x}{1-x}$; tum enim posito $\alpha + \beta = aa$, ista formula induet hanc formam:

$$aa + 4(\alpha - \beta)x + 6\,aaxx + 4(\alpha - \beta)x^3 + aax^4 = \square,$$

quae pro casu, quo $a = 1$, manifesto reducitur ad hanc:

$$(a + 2(\alpha - \beta)x + axx)^2 + 16\,\alpha\beta xx,$$

quam ergo secundum praecepta praescripta tractare licebit, id quod aliquot exemplis illustrasse juvabit.

Exemplum 1.

Formulae $2A^4 - B^4 = \square$.

§. 12. Haec formula convenit cum ea, unde vulgo bini numeri quorum summa sit quadratum quadratorum vero summa biquadratum derivari solet. Facto ergo $\frac{A}{B} = C$ ut sit $2C^4 - 1 = \square$, erit $\alpha = 2$ et $\beta = -1$, unde $\alpha + \beta = 1 = aa$ ergo $a = 1$.

(*) Solutio Problematis *Fermatiani* de duobus numeris, quorum summa sit quadratum quadratorum vero summa biquadratum (*V. Mém. Tom. IX. pag.* 3.)

Quocirca posito $C = \frac{1+x}{1-x}$ prodibit ista expressio:

$$1 + 12x + 6xx + 12x^3 + x^4 = \square \text{ sive haec:}$$

$$(1 + 6x + xx)^2 - 32xx = \square.$$

Statuatur ergo secundum praecepta tradita

$$1 + 6x + xx = \lambda(pp + 2qq) \text{ et } 4x = 2\lambda pq,$$

sive $x = \frac{1}{2}\lambda pq$ vel ut fractiones evitemus, si loco q scribamus $2q$ ut habeamus $1 + 6x + xx = \lambda(pp + 8qq)$ et $x = \lambda pq$, nascitur ista aequatio:

$$1 + 6\lambda pq + \lambda\lambda ppqq = \lambda pp + 8\lambda qq.$$

Hinc deducuntur sequentes radices

$$p = \frac{-3\lambda q \pm \sqrt{8\lambda^3 q^4 + \lambda}}{\lambda\lambda qq - \lambda}$$

$$q = \frac{-3\lambda p \pm \sqrt{\lambda^3 p^4 + 8\lambda}}{\lambda\lambda pp - 8\lambda}$$

unde cum quaelibet involvat duos valores sequitur fore

$$p + p' = \frac{-6q}{\lambda qq - 1} \text{ et } q + q' = \frac{-6p}{\lambda pp - 8}.$$

Videamus nunc quinam valores pro p et q ex priore saltem formula prodeant, unde sumto $\lambda = 1$ statim se offert casus $q = 0$, unde fit $p = 1$: Praeterea vero alius casus se offert, quo $q = 1$, qui dat $p = \frac{3 \pm 3}{1-1}$; at vero hoc casu ipsa aequatio quadratica dat $p = +\frac{7}{6}$. Statuamus ergo $\lambda = 1$ et geminos pro p et q habemus valores satisfacientes quorum alteri sunt $q = 0$ et $p = 1$, alteri vero $q = 1$ et $p = +\frac{7}{6}$ ex quibus fit $x = pq$. Relationes inter valores ex p et q derivatos erunt:

$$p + p' = \frac{-6q}{qq - 1} \text{ et } q + q' = \frac{-6p}{pp - 8}.$$

Quocirca si constituamus seriem q, p, q', p', q'', etc. erit

$$q' = \frac{-6p}{pp - 8} - q\,; \quad p' = \frac{-6q'}{q'q' - 1} - p$$

$$q'' = \frac{-6p'}{p'p' - 8} - q'\,; \quad p'' = \frac{-6q''}{q''q'' - 1} - p'.$$

etc. etc.

Ex valoribus igitur $q = 0$ et $p = 1$ nascetur ista series:

$$0\,;\; 1\,;\; \tfrac{6}{7}\,;\; \tfrac{239}{19}\,;\; \text{etc.}$$

Jam omnia producta ex binis terminis contiguis hujus seriei dabunt valores idoneos pro x (§. 7.), unde fit $C = \frac{1+x}{1-x}$. Hinc ergo pro x obtinentur hi valores: 0; $\frac{6}{7}$; $\frac{1434}{91}$; etc. unde pro C deducuntur sequentes: 1; 13; $-\frac{1525}{1343}$. etc. Alteri valores inventi $q = 1$ et $p = \frac{7}{6}$ pro serie q, p, q', p', etc. hos dant numeros $1, \frac{7}{6}, \frac{13}{239}$, etc., unde patet priores valores pro q et p assumtos solutionem penitus exhaurire neque adeo posterioribus ad Problema solvendum opus fuisse.

Exemplum 2.

Formulae $3A^4 + B^4 = \square$.

§. 13. Ad quadratum ergo redigi debet haec formula $3C^4 + 1$, cui statim tres valores satisfacere deprehenduntur, scilicet

$$C = 0, \quad C = 1, \quad C = 2.$$

Cum igitur hic sit $\alpha = 3$ et $\beta = 1$ posito $C = \frac{1+x}{1-x}$ nascetur sequens formula $4 + 8x + 24xx + 8x^3 + 4x^4 = \square$ quae per 4 divisa fit $1 + 2x + 6xx + 2x^3 + x^4 = \square$ quae ita repraesentata $(1 + x + xx)^2 + 3xx = \square$ dabit has substitutiones:

$$1 + x + xx = \lambda(pp - 3qq) \text{ et } x = 2\lambda pq,$$

unde ista aequatio inter p et q emergit

$$1 + 2\lambda pq + 4\lambda\lambda ppqq = \lambda pp - 3\lambda qq,$$

unde pro casu $\lambda = 1$ et $q = \frac{1}{2}$ statim deducitur $p = -\frac{7}{4}$. Binae autem radices quadratae pro p et q erunt

$$p = \frac{-\lambda q \pm \sqrt{\lambda \quad 12\lambda^3 q^4}}{4\lambda\lambda qq - \lambda}$$

$$q = \frac{-\lambda p \pm \sqrt{4\lambda^3 p^4 - 3\lambda}}{4\lambda\lambda pp + 3\lambda}.$$

Ex his ergo formulis erit

$$p + p' = \frac{-2\lambda q}{4\lambda\lambda qq - \lambda} \text{ et } q + q' = \frac{-2\lambda p}{4\lambda\lambda pp + 3\lambda}.$$

Quoniam jam casum invenimus $\lambda = 1$ et $q = \frac{1}{2}$, unde fit $p = -\frac{7}{4}$

hinc statim nostra series q, p, q', p', q'', p'', etc. formari potest, ope formularum:

$$p + p' = \frac{-2q}{4qq-1} \text{ et } q + q' = \frac{-2p}{4pp+3}$$

atque termini hujus seriei fient $\frac{1}{2}$, $\frac{-7}{4}$, $\frac{-33}{122}$, etc. unde cum sit $x = 2pq$, hinc nanciscimur istos valores, $x = \frac{-7}{4}$ et $x = \frac{231}{448}$ unde fit $C = \frac{-3}{11}$; tum enim erit $\sqrt{3C^4 + 1} = \frac{122}{121}$.

Exemplum 3.

Formulae $\frac{3A^4 - B^4}{2} = \square$.

§. 14. Quia igitur quadratum esse debet $\frac{3}{2}C^4 - \frac{1}{2}$ erit $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, ideoque $a = 1$ et $\alpha - \beta = 2$, oritur haec formula biquadratica

$$1 + 8x + 6xx + 8x^3 + x^4 = \square$$

sive

$$(1 + 4x + xx)^2 - 3(2x)^2 = \square.$$

Quamobrem statuatur

$$1 + 4x + xx = \lambda(pp + 3qq) \text{ et } x = \lambda pq,$$

unde prodit ista aequatio inter p et q

$$1 + 4\lambda pq + \lambda\lambda ppqq = \lambda pp + 3\lambda qq,$$

unde statim quosdam valores satisfacientes eruere possumus ita ut non opus sit ad extractionem radicis confugere. Primo enim sumto $\lambda = 1$ et $q = 1$ ista aequatio dabit $p = \frac{1}{2}$ et sumto $\lambda = 3$ et $p = 1$ erit $q = \frac{1}{6}$. Hos ergo ambos casus evolvamus. Sit igitur primo $\lambda = 1$, ita ut sit $x = pq$ et novimus casum ubi $q = 1$ et $p = \frac{1}{2}$, et quia aequatio quadratica

$$pp(qq - 1) + 4pq + 1 = 3qq$$

evidens est summam radicum ipsius p esse $p + p' = \frac{-4q}{qq-1}$ similique modo cum sit $qq(pp - 3) + 4pq + 1 = pp$ erit $q + q' = \frac{-4p}{pp-3}$. Hinc ergo formetur series q, p, q', p', etc. quae in numeris ita se

habebit 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{-3}{11}$, $\frac{47}{28}$, etc. unde deducuntur hi valores pro x, $\frac{1}{2}$, $\frac{-3}{22}$, $\frac{-141}{308}$, ideoque pro C sequentes 3, $\frac{19}{25}$, $\frac{449}{167}$, etc.

Simili modo pro altero casu ubi $\lambda = 3$, $p = 1$ et $q = \frac{1}{6}$ ob formulas generales $p + p' = \frac{-4q}{\lambda qq - 1}$ et $q + q' = \frac{-4p}{\lambda pp - 1}$ erit

$$p + p' = \frac{-4q}{3qq - 1} \text{ et } q + q' = \frac{-4p}{3pp - 3},$$

hinc series p, q, p', q', etc. ita se habebit 1, $\frac{1}{6}$, $\frac{-3}{11}$, $\frac{-47}{84}$, etc. Quia igitur hic $x = 3pq$ erit iterum $x = \frac{1}{2}$, $\frac{-3}{22}$, $\frac{-141}{308}$, sicque amplissimum usum hujus methodi me satis abunde declarasse video.

§. 15. Haec exempla nonnulla insignia compendia nobis suppeditarunt, quibus totum hoc negotium multo facilius et elegantius expediri potest, quae in sequenti Problemate clarius explicabimus.

Problema.

Proposita formula biquadratica in hac forma contenta:

$$(axx + 2bx + c)^2 - 4mnxx$$

invenire infinitos valores ipsius x, quibus ista formula evadit quadratum.

Solutio.

§. 16. Primo ista formula fit quadratum, si fuerit

$$axx + 2bx + c = \lambda(mpp - nqq) \text{ et } x = \lambda pq$$

tum enim ejus radix erit $\lambda(mpp - nqq)$. Posito igitur $x = \lambda pq$ prior aequatio induet hanc formam:

$$\lambda\lambda appqq + 2\lambda bpq + c = \lambda mpp + \lambda nqq;$$

unde statim unus casus quaesito satisfaciens elicitur sumendo $p = 0$, tum enim erit $c = \lambda nqq$. Sumto igitur $\lambda = nc$ fiet $q = \frac{1}{n}$, hicque solus casus innumerabiles alios sequenti modo producet.

§. 17. Cum aequatio modo inventa tam pro p quam pro q sit quadratica, pro utraque etiam geminum valorem continebit, unde si pro quovis q gemini valores ipsius p ponantur p et p', erit ex natura aequationum

$$p + p' = \frac{2\lambda bq}{\lambda m - \lambda\lambda aqq} \text{ sive } p + p' = \frac{2bq}{m - \lambda aqq}.$$

Simili modo pro quovis p si gemini valores ipsius q ponantur q et q' erit $q + q' = \frac{2bp}{n - \lambda app}$. Quare cum pro casu cognito invenerimus $\lambda = nc$, ubi scilicet erat $p = 0$ et $q = \frac{1}{n}$ erit pro omnibus reliquis casibus

$$p' = \frac{2bq}{m - nacqq} - p \text{ et } q' = \frac{2bp}{n - nacpp} - q.$$

Harum igitur formularum ope sequentem seriem formare licebit:

$$p, q; p', q', p'', q'', \text{ etc.}$$

quippe pro qua erit

$$p' = \frac{2bq}{m - nacqq} - p; \quad q' = \frac{2bp}{n - nacpp} - q$$

$$p'' = \frac{2bq'}{m - nacq'q'} - p'; \quad q'' = \frac{2bp'}{n - nacp'p'} - q'$$

§. 18. Cum igitur hujus seriei ex casu cognito $p = 0$ et $q = \frac{1}{n}$ ope harum formularum termini sequentes haud difficulter formari possint, erit

$$p' = \frac{2b}{mn - ac}; \quad q' = \frac{4mnbb - (mn - ac)^2}{n(mn - ac)^2 - 4nabbc}.$$

Si hoc modo etiam sequentes definire vellemus, ad expressiones nimis prolixas perveniremus, verum in exemplis numericis hunc laborem quousque libuerit haud difficulter continuare licebit.

§. 19. Inventa autem hac serie valores idonei pro ipsa quantitate x expedite assignari poterunt. Cum enim ob $\lambda = nc$ sit $x = ncpq$ ejus valores successivi erunt

$$x = ncpq, \quad x = ncp'q = \frac{2bc}{mn - ac},$$

$$x = ncp'q' = \frac{2bc(4mnbb - (mn - ac)^2)}{(mn - ac)^3 - 4abbc(mn - ac)},$$

et ita porro.

§. 20. Ex singulis autem istis valoribus ipsius x totidem alii affines sine ullo labore exhiberi poterunt. Cum enim ipsa forma proposita posito $x = \frac{1}{y}$ induat hanc formam:

$$\frac{(a + 2by + cyy)^2}{y^4} - \frac{4mn}{yy} = \square,$$

quae per y^4 multiplicata praebet istam formulam quadrato aequandam: $(a + 2by + cyy)^2 - 4mnyy$, quae a proposita aliter non differt, nisi ut litterae a et c sint permutatae. Quamobrem si in omnibus valoribus pro x inventis litteras a et c inter se permutemus, totidem valores pro littera y obtinebimus, qui inversi dabunt totidem novos valores pro x, scilicet si valor quicunque pro x inventus fuerit $x = \frac{f}{g}$, atque in quantitatibus f et g literae a et c permutentur, unde prodeant f' et g', tum quoque erit $x = \frac{g'}{f'}$, hocque modo vix ullum dubium superesse poterit, quin pro x omnes plane valores satisfacientes eruantur.

II.

SOLUTIO
PROBLEMATIS DIFFICILLIMI,
QUO HAE DUAE FORMULAE:
$aaxx + bbyy$ & $aayy + bbxx$
QUADRATA REDDI DEBENT.

Conventui exhibita die 3. Julii 1780.

§. 1.

Hanc quaestionem non solum solutu difficillimam sed etiam maximi in Analysi momenti pronunciare non dubito. Primo enim in ea evolvenda satis diu frustra desudavi; deinde vero solutio quam tandem sum adeptus plura insignia artificia calculi postulat quae haud contemnenda incrementa in universam Analysin Diophanteam inferre videntur. Cum autem haec quaestio circa bina quadratorum paria aa, bb et xx, yy versetur, eorum neutrum pro lubitu assumi potest, sed ambo parem industriam et sagacitatem requirunt.

§. 2. Ponamus igitur

$$aaxx + bbyy = zz \text{ et } aayy + bbxx = vv,$$

atque his formulis tam addendis quam subtrahendis prodit

$$(aa + bb)(xx + yy) = zz + vv \text{ et}$$
$$(aa - bb)(xx - yy) = zz - vv,$$

ex quibus quidem primum speravi solutionem derivare posse; propterea quod summa quadratorum $zz + vv$ pluribus modis in duo quadrata resolubilis requiritur: tum vero etiam manifestum est, formulam $zz - vv$ plures factores involvere debere. Interim tamen

haec consideratio vix quicquam ad solutionem inveniendam conferre videtur. Inde enim multo labore vix tandem unicam solutionem elicere potui, qua inveni $a = 5$, $b = 3$, $x = 7$, $y = 4$. Hinc enim fit

$$aaxx + bbyy = 35^2 + 12^2 = 37^2 \text{ et}$$
$$aayy + bbxx = 20^2 + 21^2 = 29^2.$$

Verum nihil prorsus attinet conatus irritos meos fusius exponere propterea quod tandem ad solutionem generalem et satis elegantem perveni.

§. 3. Primo igitur ut formula $aaxx + bbyy$ quadratum reddatur pono $\frac{ax}{by} = \frac{pp - qq}{2pq}$; pro altera vero formula pono $\frac{ax}{by} = \frac{rr - ss}{2rs}$, quarum illa per hanc divisa praebet $\frac{xx}{yy} = \frac{rs(pp - qq)}{pq(rr - ss)}$ ubi si utrinque per $\frac{pp\,qq}{rr\,ss}$ multiplicetur, orietur $\frac{ppqqxx}{rrssyy} = \frac{pq(pp - qq)}{rs(rr - ss)}$, sicque totam resolutionem perduximus ad binas has formulas inter se prorsus similes $pq(pp - qq)$ et $rs(rr - ss)$, quarum altera per alteram divisa quadratum producere debeat, vel quod eodem redit, ut earum productum evadat quadratum, in quo negotio plures Geometrae ingenti studio sunt versati, neque tamen a quoquam resolutio satis generalis est inventa, unde non solum plures solutiones particulares ad hoc institutum satis accomodatas sum adeptus, sed etiam tandem mihi contigit in solutionem generalem incidere, qua fines Analyseos diophantaeae plurimum proferentur.

§. 4. Quod si autem hujusmodi casu invenerimus quo

$$\frac{pq(pp - qq)}{rs(rr - ss)} = \frac{tt}{uu},$$

statim inde deducimus $\frac{pqx}{rsy} = \frac{t}{u}$, ideoque $\frac{x}{y} = \frac{rst}{pqu}$, qua fractione ad minimos terminos reducta ponatur $x = rst$ et $y = pqu$. Hinc cum habuerimus $\frac{ax}{by} = \frac{pp - qq}{2pq}$, ideoque $\frac{a}{b} = \frac{u(pp - qq)}{2rst}$, qua fractione ad minimos terminos reducta capiatur iterum

$$a = u(pp - qq) \text{ et } b = 2rst.$$

§. 5. Hic igitur commode in usum vocari potest tabula quam non ita pridem in dissertatione dedi, in qua hujus formulae:

$$AB(AA - BB),$$

factores non quadratos exhibui. Quod si enim inde depromantur duo casus eosdem factores non quadratos continentes, eorum productum utique erit quadratum, ideoque solutionem nostri Problematis suppeditabit. In ea autem tabula statim se offerunt tales valores: $p = 5, q = 2$, $r = 6$, $s = 1$. Hinc enim erit $\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = 1$, ideoque $t = 1$ et $u = 1$ unde ergo habebimus $\frac{x}{y} = \frac{rs}{pq} = \frac{3}{5}$ et $\frac{a}{b} = \frac{pp-qq}{2rs} = \frac{7}{4}$. Hinc ergo colligimus $a = 7$, $b = 4$, $x = 5$, $y = 3$ quandoquidem tam litteras a et b, quam x et y inter se permutare licet, sicque iste casus cum ante memorato convenit.

§. 6. Simili modo tabula allegata etiam dat hos valores: $p = 5$; $q = 2$; $r = 8$, $s = 7$, unde fit $\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = \frac{1}{4}$, ergo $t = 1$ et $u = 2$. Hinc ergo habebimus

$$\frac{x}{y} = \frac{rs}{2pq} = \frac{14}{5} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{pp-qq}{rs} = \frac{3}{8}.$$

Quamobrem sumi potest $a = 8$, $b = 3$, $x = 14$, $y = 5$ unde fit $aaxx + bbyy = 113^2$ et $aayy + bbxx = 38^2$ quae solutio a praecedente parum discrepat.

§. 7. Adhuc alius casus ex tabula depromi potest, quo $p = 6$, $q = 5$, $r = 8$, $s = 3$, qui dat $\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = \frac{1}{4}$ ergo iterum $t = 1$ et $u = 2$, unde colligitur

$$\frac{x}{y} = \frac{rs}{2pq} = \frac{2}{5} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{pp-qq}{rs} = \frac{11}{24}.$$

Sumto igitur $a = 24$, $b = 11$; $x = 5$, $y = 2$, fiet

$$aaxx + bbyy = 122^2 \text{ et } aayy + bbxx = 73^2.$$

§. 8. Quoniam autem hoc modo solutiones tantum singulares reperiuntur, atque tabula illa ad limites satis arctos restringitur,

hic potissimum in formulas generaliores sumus inquisituri, quae simul infinitam multitudinem solutionum contineant, id quod pluribus modis fieri posse observavi, etsi hae formulae tantum solutiones particulares exhibeant. Quamobrem aliquot hujusmodi solutiones particulares in medium afferamus, ex quibus innumerabiles alias solutiones derivare liceat, quibus expositis solutionem demum generalem aggrediemur.

Prima solutio particularis.

§. 9. Sumamus statim $s = q$ et $r = p + q$, quo pacto fractio nostra generalis $\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = \frac{tt}{uu}$ ad hanc simplicem formam reducitur $\frac{p-q}{p+2q} = \frac{tt}{uu}$ unde deducimus $\frac{p}{q} = \frac{uu+2tt}{uu-tt}$. Quamobrem si sumamus $p = uu + 2tt$ et $q = uu - tt$ fiet $r = 2uu + tt$ et $s = uu - tt$. Ex his ergo valoribus colligitur

$$\frac{x}{y} = \frac{t(2uu+tt)}{u(uu+2tt)} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{3tu}{2(uu-tt)}$$

ideoque

$$a = 3tu, \quad b = 2(uu-tt), \quad x = t(2uu+tt), \quad y = u(uu+2tt).$$

Ex his autem valoribus erit

$$ax = 3ttu(2uu+tt) \quad \text{et} \quad by = 2u(uu-tt)(uu+2tt).$$

Hinc igitur colligimus

$$z = u\left((uu-tt)^2 + (uu+2tt)^2\right) = u(2u^4 + 2ttuu - 5t^4).$$

Simili modo cum sit

$$ay = 3tuu(uu+2tt) \quad \text{et} \quad bx = 2t(uu-tt)(2uu+tt),$$

unde colligimus

$$v = t\left((uu-tt)^2 + (2uu+tt)^2\right) = t(2t^4 + 2ttuu + 5u^4).$$

§. 10. Hinc igitur facili negotio plurimae solutiones singulares deduci poterunt, quia pro litteris t et u numeros quoscunque assumere licet, non solum in numeris exiguis sed etiam valores quantumvis grandes assumere licebit, cujus modi ope tabulae ante usitatae neutiquam obtineri possunt. Operae igitur pretium erit has

formulas per exempla illustrare, dum scilicet litteris t et u valores pro arbitrio assignamus. At quia litterae t et u inter se permutantur ipsi u valores majores, t vero minores tribuamus, quia casus $t = u$ nihil daret. Hinc in sequentem tabulam plura exempla simul ante oculos ponamus:

u	2	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6
t	1	1	2	1	3	1	2	3	4	1	5
a	1	9	9	2	18	5	5	45	10	9	45
b	1	16	5	5	7	16	7	32	3	35	11
x	3	19	44	11	123	17	36	177	88	73	485
y	4	33	51	24	136	45	55	215	95	228	516
z	5	555	471	122	2410	725	425	10525	925	8007	22551
v	5	425	509	73	2595	353	373	11211	986	3277	23825

Solutio particulares secunda.

§. 11. Maneat $r = p + q$ et sumatur $s = p$ fietque

$$\frac{pq(pp - qq)}{rs(rr - ss)} = \frac{tt}{uu} = \frac{p - q}{2p + q},$$

unde colligitur $\frac{p}{q} = \frac{uu + tt}{uu - 2tt}$. Sumatur ergo $p = uu + tt$ atque $q = uu - 2tt$, eritque $r = 2uu - tt$ et $s = uu + tt$. Ex his valoribus sequitur fore

$$\frac{x}{y} = \frac{rst}{pqu} = \frac{t(2uu - tt)}{u(uu - 2tt)} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{u(pp - qq)}{2rst} = \frac{3tu}{2(uu + tt)}.$$

Quamobrem radices quatuor nostrorum quadratorum erunt:

$a = 3tu$; $b = 2(uu + tt)$; $x = t(2uu - tt)$; $y = u(uu - 2tt)$,

quae solutio a praecedente hoc tantum differt, quod tt hic sit negative sumtum, manente tamen radice t eadem, unde deducuntur pro z et v sequentes valores:

$$z = u(2u^4 - 2ttuu + 5t^4) \text{ et } v = t(2t^4 - 2ttuu + 5u^4),$$

sive in gratiam calculi

$$z = u((uu + tt)^2 + (uu - 2tt)^2)$$
$$v = t((uu + tt)^2 + (2uu - tt)^2).$$

§. 12. Etsi hae formulae tam parum a praecedentibus differunt, tamen prorsus diversas in numeris solutiones suppeditant; quocirca ut ante loco t et u valores simpliciores accipiamus et solutiones numericas in sequenti tabula repraesentemus, ubi notandum, si loco a, b, x, y prodeant valores negativi, eorum loco semper positivos scribi posse.

u	1	2	3	3	4	4	5	5	5	6
t	1	1	1	2	1	3	1	3	4	1
a	3	3	9	9	6	18	15	45	30	9
b	4	5	20	13	17	25	52	68	41	37
x	1	7	17	28	31	69	49	123	136	71
y	1	4	21	3	56	8	115	35	35	204
z	5	29	447	255	970	1258	6025	6025	4325	7575
v	5	37	389	365	625	1731	3077	8511	5674	3205

Solutio particularis tertia.

§. 13. Sumamus hic $s = q$ ac ponamus $\frac{pq(pp - qq)}{rs(rr - ss)} = 1$, eritque $p(pp - qq) = r(rr - qq)$ unde fit

$$qq = \frac{r^3 - p^3}{r - p} = rr + pr + pp,$$

quae ergo formula quadratum esse debet. Cum igitur sit

$$qq = (r + \tfrac{1}{2}p)^2 + 3\left(\tfrac{p}{2}\right)^2,$$

sumatur $r + \frac{1}{2}p = tt - 3uu$ et $\frac{1}{2}p = 2tu$, eritque $q = tt + 3uu$. Quoniam ergo $p = 4tu$ erit $r = tt - 2tu - 3uu = (t + u)(t - 3u)$. Quare cum pro praecedentibus formulis sit $t = 1$ et $u = 1$, quos valores cum praesentibus confundi non oportet, erit:

$$\frac{x}{y} = \frac{rs}{pq} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{pp - qq}{2rs}.$$

Habebimus ergo $x = (t + u)(t - 3u)$ et $y = 4tu$; tum vero

$$a = (t - u)(t + 3u) \quad \text{et} \quad b = 2(tt + 3uu).$$

Cum igitur sit

$$ax = (tt - uu)(tt - 9uu) \quad \text{et} \quad by = 8tu(tt + 3uu)$$

ponatur $(tt - uu)(tt - 9uu) = A^2 - B^2$ atque esse oportet

$$8tu(tt + 3uu) = 2AB,$$

ut fiat $z = A^2 + B^2$. Erit ergo $AB = 4tu(tt + 3uu)$, unde sumamus $A = tt + 3uu$ et $B = 4tu$, eritque

$$A + B = (t + 3u)(t + u) \text{ et } A - B = (t - 3u)(t - u)$$

quocirca erit $A^2 - B^2 = (tt - uu)(tt - 9uu)$ prorsus uti requiritur, consequenter erit nunc

$$z = (tt + 3uu)^2 + 16ttuu = t^4 + 22ttuu + 9u^4.$$

Simili modo sit $ay = 4tu(t - u)(t + 3u) + 4AB$ et

$$bx = 2(t + u)(t - 3u)(tt - 3uu) = 2(A^2 - B^2).$$

Hinc enim fiet $v = 2(A^2 + B^2)$. Statuamus ergo $A + B = tt + 3uu$ et $A - B = tt - 2tu - 3uu$ unde fit $A = tt - tu$ et $B = 3uu + tu$, quod cum positione egregie convenit, consequenter erit

$$v = 2\left(tt(t - u)^2 + uu(t + 3u)^2\right).$$

En ergo solutionem nostri problematis tertiam particularem

$$a = (t - u)(t + 3u); \quad b = 2(tt + 3uu)$$
$$x = (t + u)(t - 3u); \quad y = 4tu$$
$$z = (tt + 3uu)^2 + 16ttuu$$
$$v = 2tt(t - u)^2 + 2uu(t + 3u)^2.$$

Ubi iterum notandum est si pro his litteris valores prodeant negativi, eos tuto in positivos verti posse. Tribuamus igitur binis litteris t et u simpliciores valores numericos, unde quidem casus $t = u$, et $t = 3u$ excludi debent, itemque casus ubi t et u sunt impares, et solutiones hinc oriundas in sequenti tabula stipemus

t	2	1	4	1	4	5	2	5	4
u	1	2	1	4	3	2	5	4	5
a	5	7	21	39	13	33	51	17	19
b	14	26	38	98	86	74	158	146	182
x	3	15	5	55	35	7	91	63	99
y	8	8	16	16	48	40	40	80	80
z	113	233	617	2657	4153	2919	7841	11729	14681
v	58	394	368	6426	3074	1418	14522	9298	18082

Solutio generalis.

§. 14 Cum totum negotium reductum sit ad resolutionem hujus aequationis: $\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)}=\frac{tt}{uu}$, loco $\frac{tt}{uu}$ scribamus brevitatis gratia litteram n, ita ut sit $t=\sqrt{n}$ et $u=1$, unde ex litteris p, q, r, s, inventis numeri quaesiti a, b, x, y ita determinabuntur, ut sit $\frac{x}{y}=\frac{rs}{pq}\sqrt{n}$ et $\frac{a}{b}=\frac{pp-qq}{2rs\sqrt{n}}$, vel, cum litterae a et b inter se permutari queant, poni poterit $\frac{a}{b}=\frac{2rs}{pp-qq}\sqrt{n}$, quibus fractionibus ad minimos terminos reductis habebuntur ipsi numeri quaesiti a, b, x, y. Nunc quemadmodum illa aequatio principalis:

$$\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)}=n,$$

resolvi debeat hic prorsus novam methodum apperiam, unde maxima incrementa in universam Analysin Diophantaeam redundabunt, cum a nemine adhuc ista aequatio generaliter sit evoluta.

§. 15. Quoniam hic sola relatio inter binas litteras p et q et inter binas r et s in computum venit, sine ulla restrictione assumere licet $s=q$ ita ut sit $\frac{p(pp-qq)}{r(rr-qq)}=n$; hinc colligitur $qq=\frac{p^3-nr^3}{p-nr}$. Hic jam porro statuatur $p=rv$ fietque $\frac{qq}{rr}=\frac{v^3-n}{v-n}$, sicque tota invetigatio eo redit, ut ista formula $\frac{v^3-n}{v-n}$ quadrato aequetur. Communi igitur methodo utentes, productum ex numeratore in denominatorem, quod est $v^4-nv^3-nv+nn$ quadratum reddi deberet cujus quidem ope statim aliquot valores pro v erui possent, quibus inventis ipsa haec formula per novas substitutiones transformari deberet, unde denuo novi valores erui possent, verum mox ad numeros tam enormes perveniretur, ut non nisi paucissimi valores modicae magnitudinis erui possent. At vero methodus mea nova nobis plurimas solutiones in numeris satis exiguis suppeditabit.

§. 16. Statuo autem $\frac{v^3-n}{v-n}=(v-z)^2$, ita ut sit $\frac{q}{r}=v-z$, dum, ut ante vidimus, est $\frac{p}{r}=v$. Facta igitur evolutione prodit

haec aequatio:

$$(n+2z)\,vv - z(2n+z)\,v + n(zz-1) = 0,$$

quae tam respectu ipsius v quam ipsius z est quadratica, ideoque duas radices exhibet. At vero termini secundum z dispositi praebebunt hanc aequationem:

$$(n-v)\,zz - 2v(n-v)\,z - n(1-vv) = 0.$$

Quoniam igitur cuilibet factori ipsius v gemini ipsius z respondent, si hi designentur per z et z' erit ex natura aequationum $z+z'=2v$. Simili modo cuilibet valori ipsius z respondent gemini ipsius v, qui si ponantur v et v' erit $v+v'=\frac{z(z+2n)}{2z+n}$, unde, si jam valores pro v et z quicunque habeantur, ex iis novi pro iisdem litteris, scilicet v' et z' erit $z'=2v-z$ et $v'=\frac{z(z+2n)}{2z+n}-v$. Similique modo ex his valoribus denuo bini novi, hincque porro alii in infinitum reperiri poterunt, idque facili negotio, atque in hac duplici evolutione tota vis novae solutionis consistit, ita ut hoc modo plurimi valores sine ulla molesta transformatione obtineri queant statim atque binos tantum valores pro v et z cognoverimus.

§. 17. Tales autem valores primitivos ipsa aequatio quadratica quasi sponte nobis offert. Posito enim $v=0$ fiet $zz-1=0$ unde duo valores oriuntur $z=+1$ et $z=-1$. Simili modo posito $z=0$ fit $vv-1=0$ ideoque tam $v=+1$ quam $v=-1$, ita ut hinc jam habeamus quatuor casus, unde continuo novi valores pro litteris v et z derivari queant. Praeterea vero etiam quintus casus adjici poterit, ex positione $v=\infty$ oriundus; tum enim coëfficiens ipsius vv qui est $n+2z$ nihilo aequari debet, unde cum fiat $z=-\frac{n}{2}$ nunc aequatio induet hanc formam: $3nv+nn-4$, unde colligitur $v=\frac{4-nn}{3n}$, qui est alter valor ipsius v, valori $z=-\frac{n}{2}$ respondens, dum alter erat $v=\infty$, atque ex his duobus valoribus $z=-\frac{n}{2}$ et $v=\frac{4-nn}{3n}$, ope nostrarum formularum

continuo plures novi elici poterunt. Hinc ergo istos quinque casus ulterius evolvamus.

Casus I,

quo $v = 0$ et $z = +1$.

§. 18. Hinc igitur per nostras formulas alternatim applicandas novi valores inde oriundi reperiuntur:

1°) $v = \frac{1+2n}{2+n}$, $z = \frac{3n}{2+n}$;

2°) $v = \frac{4(nn+n-2)}{nn+10n+16} = \frac{4(n-1)}{n+8}$; $z = \frac{5nn-16n-16}{nn+10n+16}$.

In genere autem vix ulterius progredi licet. Loco n nunc restituamus $\frac{tt}{uu}$, et cum secundus valor sit $v = \frac{1+2n}{2+n}$ et $v-z = \frac{n-1}{2+n}$, erit $v = \frac{p}{r} = \frac{uu+2tt}{2uu+tt}$ et $v-z = \frac{q}{r} = \frac{tt-uu}{tt+2uu}$. Quamobrem sumamus $p = uu+2tt$, $q = tt-uu$, $r = 2uu+tt$, $s = tt-uu$, qui casus prorsus congruit cum solutione particulari prima supra data. Simili modo evolvamus valorem tertium ipsius v qui erat $\frac{4(n-1)}{n+8}$ cui respondet $z = \frac{3n}{2+n}$, unde fit $v-z = \frac{nn-20n-8}{(2+n)(8+n)}$. Hinc ergo erit $\frac{p}{r} = \frac{4(tt-uu)}{tt+8uu}$ et $\frac{q}{r} = \frac{t^4-20ttuu-8u^4}{(2uu+tt)(8uu+tt)}$. Sumatur ergo $r = (2uu+tt)(8uu+tt)$ eritque

$$p = 4(tt-uu)(tt+2uu) \text{ et } q = s = t^4-20\,ttuu-8u^4.$$

Hinc igitur porro reperitur

$$\frac{x}{y} = \frac{t(8uu+tt)}{4u(tt-uu)} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{3tu(5t^4-16ttuu-16u^4)}{2(2uu+tt)(t^4-20ttuu-8u^4)}$$

unde innumerabiles novae solutiones reperiuntur.

Casus II,

quo $v = 0$ et $z = -1$.

§. 19. Hic ergo formulis supra datis sequentes valores deducuntur: $v = \frac{1-2n}{n-2}$; $z = -\frac{3n}{n-2}$; $v = \frac{-4(n+1)}{n-8}$. Evolvamus secundum valorem ipsius v scilicet $\frac{1-2n}{n-2}$, cui respondet $z = -1$;

unde fit $v - z = \frac{n+1}{2-n}$; ergo loco n posito $\frac{tt}{uu}$ fiet

$$\frac{p}{r} = v = \frac{uu - 2tt}{tt - 2uu} \text{ et } \frac{q}{r} = v - z = \frac{tt + uu}{2uu - tt}.$$

Sumto ergo $r = tt - 2uu$ erit $p = uu - 2tt$ et $q = s = tt + uu$ unde jam patet hunc casum cum solutione particulari secunda convenire, quia litteras p et q inter se permutare licet, neque ergo opus est hunc casum ulterius prosequi.

§. 20. Consideremus igitur tertium valorem ipsius v qui erat $\frac{-4(n+1)}{n-8}$, cui respondet $z = \frac{-3n}{n-2}$. His duobus valoribus cognitis habebimus $\frac{p}{r} = v$ et $\frac{q}{r} = v - z$, sicque obtinebuntur quatuor litterae p, q, r, s, ex quibus porro facile deducuntur numeri quaesiti a, b, x, y, ope formularum supra datarum

$$\frac{a}{b} = \frac{2rs}{pp - qq}\sqrt{n} \text{ et } \frac{x}{y} = \frac{rs}{pq}\sqrt{n}.$$

Ad quod illustrandum evolvamus casum, quo $n = \frac{9}{4}$ eritque $z = -27$ et $v = \frac{52}{23}$. Hinc fit $v - z = \frac{673}{23}$. Hinc ergo erit $\frac{p}{r} = \frac{53}{23}$ et $\frac{q}{r} = \frac{673}{23}$. Sumatur ergo $r = 23$ erit $p = 53$ et $q = 673 = s$ unde porro sequitur $\frac{a}{b} = \frac{23 \cdot 673}{242 \cdot 620}$ et $\frac{x}{y} = \frac{3 \cdot 23}{2 \cdot 53}$. Quatuor ergo numeri quaesiti erunt

$$a = 23 \cdot 673;\ b = 242 \cdot 620;\ x = 3 \cdot 23;\ y = 2 \cdot 53.$$

Casus III,

quo $z = 0$ et $v = 1$.

§. 21. Ex formulis supra datis pro hoc casu deducuntur sequentes valores:

$$z = 2;\ v = \frac{3n}{n+4};\ z = \frac{4(n-2)}{n+4};\ v = \frac{5nn - 24n + 16}{nn + 12n - 6},$$

ubi primus valor ipsius v nihil prodest; secundus vero $v = \frac{3n}{n+4}$ cui respondet $z = 2$, ita ut sit $v - z = \frac{n-8}{n+4}$, dat

$$\frac{p}{r} = \frac{3tt}{tt + 4uu} \text{ et } \frac{q}{r} = \frac{tt - 8uu}{tt + 4uu}.$$

Sumto ergo $r = tt + 4uu$ habebimus $p = 3tt$ et $q = s = tt - 8uu$ ex quibus porro deducimus:

$$\frac{a}{b} = \frac{t(tt - 8uu)}{4u(tt - 2uu)} \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \frac{(tt + 4uu)}{3tu}.$$

Hae formulae reddentur concinniores, si loco u scribamus $\frac{1}{2}u$, tum enim erit:

$$\frac{a}{b} = \frac{t(tt - 2uu)}{u(2tt - uu)} \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \frac{2(tt + uu)}{3tu},$$

consequenter quatuor numeri nostri quaesiti erunt:

$$a = t(tt - 2uu); \; b = u(2tt - uu); \; x = 2(tt + uu); \; y = 3tu,$$

qui casus iterum convenit cum solutione secunda particulari.

Casus IV,

quo $z = 0$ et $v = -1$.

§. 22. Hinc igitur valores derivati ita progredientur:

$$z = 0; \; v = -1; \; z = -2; \; v = \frac{-3n}{n-4}; \; z = \frac{-4(n+2)}{n-4};$$
$$v = \frac{-(5nn + 24n + 16)}{nn - 12n - 16};$$

qui valores a praecedente casu hoc tantum differunt, quod sumto n negativo etiam v et z fiunt negativi. Hinc si ex valore $v = \frac{-3n}{n-4}$, posito $n = \frac{tt}{uu}$ litterae p, q, r, s, derivantur erit

$$p = 3tt; \; q = s = tt + 8uu; \; r = tt - 4uu;$$

ac si hic ut ante loco u scribamus $\frac{1}{2}u$, valores litterarum a, b, x, y, quaesiti erunt:

$$a = t(tt + 2uu); \; b = u(2tt + uu); \; x = 2(tt - uu); \; y = 3tu,$$

quae formulae conveniunt cum casu particulari primo. At vero sequentes valores ipsius v in omnibus his casibus prorsus novas suppeditabunt solutiones in casibus particularibus non contentos, ex quo generalitas hujus novae solutionis clarissime elucet.

Casus V,

qui incipit a $v = \infty$.

§. 23. Ex formulis ergo generalibus valores successive pro

v et z ita se habebunt:

$$v = \infty; \quad z = \frac{-n}{2}; \quad v = \frac{4-nn}{3n}; \quad z = \frac{16-nn}{6n}; \quad v = \frac{n(64-nn)}{8(nn+8)}.$$

Hic jam secundus valor ipsius v qui est $\frac{4-nn}{3n}$, cui respondet $z = \frac{-n}{2}$, ita ut sit $v - z = \frac{8+nn}{6n}$, posito $n = \frac{tt}{uu}$, hos praebet valores: $\frac{p}{r} = \frac{4u^4 - t^4}{3ttuu}$ et $\frac{q}{r} = \frac{8u^4+t^4}{6ttuu}$, unde deducimus

$$p = 8u^4 - 2t^4; \quad r = 6ttuu; \quad q = s = 8u^4 + t^4,$$

ex quibus colligimus fore

$$\frac{a}{b} = \frac{4u(8u^4+t^4)}{t(16u^4-t^4)} \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \frac{6t^3u}{8u^4-2t^4},$$

ideoque sumi poterit

$$a = 4u(8u^4+t^4); \quad b = t(16u^4-t^4); \quad x = 6t^3u; \quad y = 8u^4-2t^4.$$

Has igitur formulas ad solutiones quasdam speciales accommodemus, tribuendo litteris t et u valores simpliciores, quas solutiones in sequenti tabula comprehendamus:

t	1	2	3	3	1	1	2
u	1	1	1	2	3	2	3
a	12	1	4.89	8.11.19	11.12.59	8.43	3.83
b	5	0	3.5.13	3.7.25	5.7.37	5.17	2.5.8
x	1	2	81	2.81	9	2	3.6
y	1	1	7.11	17	17.19	21	7.11

§. 24. His casibus litteras z et v non ultra paucos terminos assignare licuit, si quidem litterae n valorem indefinitum relinquamus; at si ejus loco determinata quadrata assumamus, plerumque has series ad plurimos terminos continuare licet, id quod nonnullis exemplis ostendisse juvabit.

Evolutio solutionum ex casu $n = 4$ oriundarum.

§. 25. Hoc ergo casu erit $v' = \frac{z(z+8)}{2z+4} - v$ manente $z' = 2v - z$. In hujus evolutione statim a casu quinto quo

$v = \infty$ incipiamus, quoniam mox videbimus, in eo reliquos quatuor casus omnes comprehendi. Quoniam igitur pro hoc casu vidimus esse $z = \frac{-n}{2}$ et sequens $v = \frac{4-nn}{3n}$, series harum litterarum sequenti modo se habebit:

$v = \infty$;	$z = -2$	$v = +\frac{17}{3}$;	$z = -\frac{14}{3}$
$v = -1$;	$z = 0$	$v = -\frac{11}{4}$;	$z = -\frac{5}{6}$
$v = +1$;	$z = +2$	$v = +\frac{4}{21}$;	$z = +\frac{17}{14}$
$v = \frac{3}{2}$;	$z = +1$	$v = +\frac{31}{20}$;	$z = +\frac{66}{35}$
$v = 0$;	$z = -1$	$v = +\frac{101}{119}$;	$z = -\frac{16}{85}$
$v = -\frac{7}{2}$;	$z = -6$	$v = -\frac{69}{55}$;	$z = -\frac{434}{187}$
$v = +5$;	$z = +16$	$v = +\frac{741}{34}$;	etc.

§. 26. Hinc jam ex quovis valore v cum proximo z conjuncto (perinde enim est, sive cum praecedente sive cum sequente conjungatur) solutio nostrae quaestionis deduci potest, cum sit

$$\frac{p}{r} = v \quad \text{et} \quad \frac{q}{r} = v - z,$$

hincque porro ob $\sqrt{n} = 2$ erit

$$\frac{a}{b} = \frac{4rs}{pp-qq} \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \frac{2rs}{pq}.$$

Ita sumto $v = \frac{4}{21}$, cui respondet $z = \frac{-5}{6}$ fiet $z - v = \frac{43}{42}$. Hinc ergo erit $\frac{p}{r} = \frac{4}{21}$ et $\frac{q}{r} = \frac{43}{42}$. Sumto ergo $r = 42$ erit $p = 8$ et $q = s = 43$. Ex his valoribus denique colligitur $\frac{a}{b} = \frac{8 \cdot 43}{5 \cdot 17}$ et $\frac{x}{y} = \frac{21}{2}$, quocirca erit

$$a = 8 \cdot 43; \quad b = 5 \cdot 17; \quad x = 21; \quad y = 2.$$

Hinc erit $ax = 3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 43$ et $by = 2 \cdot 5 \cdot 17$, qui factorem communem habent 2. Posito ergo

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 = AB \quad \text{et} \quad 5 \cdot 17 = AA - BB,$$

sumtoque $A = 43$ et $B = 42$ fiet $AA - BB = 5 \cdot 17$ uti requiritur, ex quo erit $\sqrt{aaxx + bbyy} = 2(43^2 + 42^2) = 7226$

quem numerum supra vocavimus z. Simili modo erit $ay = 16 . 43$ et $bx = 3 . 5 . 7 . 17$, atque hic habebimus

$$AB = 8 . 43 \quad \text{et} \quad A^2 - B^2 = 3 . 5 . 7 . 17.$$

Sumto ergo $A = 43$ et $B = 8$ erit $A^2 - B^2 = 35 . 51$ quamobrem erit $\sqrt{aayy + bbxx} = 1913$, quem numerum supra indicavimus littera v ita ut v et z innotescunt. Ceterum quia in serie litterarum z et v inventa occurrunt valores $v = 0$ et $z = 0$ evidens est, omnes quatuor priores casus in illa involvi.

Evolutio solutionum,

ex casu $n = \frac{1}{4}$ oriundorum.

§. 27. Hoc ergo casu erit $v' = \frac{2z(2z+1)}{8z+1} - v$ manente $z' = 2v - z$. Pro hoc jam omnes quinque casus supra constitutos percurramus:

I.	II.	III.	IV.	V.
$v = 0$	$v = 0$	$v = \infty$	$z = 0$	$z = 0$
$z = 1$	$z = -1$	$z = -\frac{1}{8}$	$v = 1$	$v = -1$
$v = \frac{2}{3}$	$v = -\frac{2}{7}$	$v = \frac{21}{4}$	$z = 2$	$z = -2$
$z = \frac{1}{3}$	$z = +\frac{3}{7}$	$z = \frac{85}{8}$	$v = \frac{3}{17}$	$v = +\frac{1}{5}$
$v = -\frac{4}{11}$	$v = \frac{20}{31}$	$v = \frac{341}{32 . 43}$	$z = -\frac{28}{17}$	$z = \frac{12}{5}$
$z = -\frac{35}{33}$	$z = \frac{187}{7 . 31}$	$z = \frac{6969}{16 . 43}$	$v = -\frac{55}{69}$	$v = \frac{119}{101}$

evidens autem est, pro v valores inversos in praecedente casu comprehendi debere, quoniam permutatis litteris p et r loco n scribi debet $\frac{1}{n}$.

§. 28. Casum praecipuum quo $n = 1$, ideo hic non attingimus, quoniam in casu particulari tertio jam penitus est exhaustus. Ceterum, quia hoc casu $n = 1$ aequatio quadratica inter z

et v inventa evadit $(1+2z)vv - z(2+z)v + zz - 1 = 0$ sive $(1-v)zz - 2v(1-v)z + vv - 1 = 0$, quae aequatio cum divisorem habeat $v - 1$, evidens est, posito $v = 1$ valorem respondentem z arbitrio nostro relinqui.

§. 29. Coronidis loco problema multo magis arduum hic subjungamus, quod vix aggredi ausus fuissem, nisi praeter omnem exspectationem solutio particularis tertia ejus solutionem suppeditasset.

Problema.

Invenire quatuor numeros quadratos, aa, bb, cc, dd, ejus indolis, ut productum ex binis quibusvis, una cum producto binorum reliquorum faciat quadratum, sive ut istae tres formulae evadant quadrata:

$$aabb + ccdd = \square$$
$$aacc + bbdd = \square$$
$$aadd + bbcc = \square.$$

Solutio.

§. 30. Solutio particularis tertia pro litteris a, b, x, y, hos nobis suppeditavit valores:

$$a = (t-u)(t+3u);\quad b = 2(tt+3uu);$$
$$x = (t+u)(t-3u);\quad y = 4tu;$$

ubi formula pro x inventa ita similis est illi pro a inventae, ut sumto u negativo altera in alteram vertatur. Quare cum sit

$$bbxx + aayy = \square,$$

permutatis a et x etiam haec formula $aabb + xxyy$ erit quadratum cum ex conditione problematis jam hae duae formulae:

$$aaxx + bbyy \text{ et } aayy + bbxx$$

sint quadrata, sicque omnes has quatuor litteras a, b, x, y, inter

se permutare licet. Quare nil aliud opus est nisi ut loco x et y scribamus c et d, atque solutio hujus problematis maxime generalis sequentibus formulis satis simplicibus continetur:

$$a = 4tu;\ b = 2(tt + 3uu);\ c = (t - u)(t + 3u);$$
$$d = (t + u)(t - 3u),$$

ubi pro litteris t et u numeros quoscunque pro lubitu accipere licet.

§. 31. Hinc simplicissimus casus orietur sumendo $t = 2$ et $u = 1$; tum enim fiet

$$a = 8;\ b = 14;\ c = 5;\ d = 3.$$

Ceterum omnes solutiones in solutione particulari allatae aeque satisfaciunt quos in sequenti tabula iterum ob oculos ponamus:

t	2	1	4	1	4	5	2	5	4
u	1	2	1	4	3	2	5	4	5
a	8	8	16	16	48	40	40	80	80
b	14	26	38	98	86	74	158	146	182
c	5	7	21	39	13	33	51	17	19
d	3	15	5	55	35	7	91	63	99

Solutio succinctior.

§. 32. Quaerantur duo numeri f et g, ut sit $ff + 3gg = hh$, quod fit, uti vidimus $f = tt - 3uu$, $g = 2tu$, tum enim erit $h = tt + 3uu$, hincque quatuor numeri quaesiti erunt

$$a = 2g;\ b = 2h;\ c = f + g;\ d = f - g,$$

ex his porro valoribus reperitur:

$$\sqrt{aabb + ccdd} = ff + 7gg,$$
$$\sqrt{aacc + bbdd} = 2(ff - fg + 2gg),$$
$$\sqrt{aadd + bbcc} = 2(ff + fg + 2gg).$$

Hinc patet, in hac solutione semper fore $c - d = a$. Quoniam

vero haec solutio quasi praeter omnem expectationem sponte ex praecedentibus se obtulit solutionem directam adjungamus.

Solutio directa.

§. 33. Cum facta divisione per primum terminum hae tres formulae quadrata esse debeant:

$$1^{\circ})\ 1+\frac{ccdd}{aabb}=\square;\quad 2^{\circ})\ 1+\frac{bbdd}{aacc}=\square;\quad 3^{\circ})\ 1+\frac{bbcc}{aadd}=\square,$$

ponatur

$$\frac{cd}{ab}=\frac{pp-qq}{2pq}=\mathrm{P};\ \frac{bd}{ac}=\frac{rr-ss}{2rs}=\mathrm{R}\ \text{et}\ \frac{bc}{ad}=\frac{tt-uu}{2tu}=\mathrm{T}.$$

Ex his positionibus jam colligitur

$$\frac{d}{a}=\sqrt{\mathrm{PR}};\quad \frac{c}{a}=\sqrt{\mathrm{PT}};\quad \frac{b}{a}=\sqrt{\mathrm{RT}};$$

quare ad solutionem inveniendam quaeri debent tres hujusmodi formulae P, R, T, ut producta ex binis sint quadrata. Tum enim facile numeri quaesiti a, b, c, d, in integris definientur. Tales autem numeri obtinentur, sumendo

$$p=4fg,\quad q=ff+3gg;\quad r=ff+2fg-3gg,$$
$$s=ff+3gg;\quad t=ff-2fg-3gg;\quad u=ff+3gg,$$

tum enim solutio supra data orietur, id quod nonnullis exemplis illustremus.

Exemplum 1.

§. 34. Sumatur $p=6$; $r=5$; $t=8$;
$q=1$; $s=2$; $u=7$,

ex his igitur erit $\mathrm{P}=\frac{5\cdot 7}{4\cdot 3}$; $\mathrm{R}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}$; $\mathrm{T}=\frac{3\cdot 5}{16\cdot 7}$ unde porro colligitur $\sqrt{\mathrm{PR}}=\frac{7}{4}=\frac{d}{a}$; tum vero

$$\sqrt{\mathrm{PT}}=\tfrac{5}{8}=\frac{c}{a},\ \text{denique}\ \sqrt{\mathrm{RT}}=\tfrac{3}{8}=\frac{b}{a}.$$

Quamobrem si sumamus $a=8$ erit $b=3$, $c=5$, $d=14$, quae est solutio simplicissima jam supra eruta.

Exemplum 2.

§. 35. Sumatur $p = 6$; $r = 8$; $t = 27$;
$q = 5$; $s = 3$; $u = 22$,

unde fit $P = \frac{11}{4 \cdot 3 \cdot 5}$; $R = \frac{5 \cdot 11}{16 \cdot 3}$; $T = \frac{5 \cdot 7^2}{4 \cdot 3^2 \cdot 11}$ hinc porro sequitur fore $\sqrt{PR} = \frac{11}{24} = \frac{d}{a}$, $\sqrt{PT} = \frac{7}{36} = \frac{c}{a}$ et $\sqrt{RT} = \frac{35}{72} = \frac{b}{a}$. Sumto ergo $a = 72$ erit $b = 35$; $c = 14$; $d = 33$, qui valores prorsus discrepant ab iis quas praecedens methodus suppeditavit, unde patet superiorem solutionem non esse generalem sed innumeras alias praeterea solutiones locum habere posse, ad quas inveniendas methodus requiritur idoneos valores pro tribus formulis P, R, T, in genere investigandi, quod negotium aliis evolvendum relinquo.

III.

INVESTIGATIO BINORUM NUMERORUM FORMAE $xy(x^4 - y^4)$ QUORUM PRODUCTUM SIVE QUOTUS SIT QUADRATUM.

Conventui exhibita die 14. Aug. 1780.

§. 1.

In Analysi Diophantea plura occurrunt Problemata ad quae resolvenda requiruntur duo numeri formae $xy(xx - yy)$ vel etiam hujus $xy(xx + yy)$, quorum alter per alterum divisus producat quadratum. At vero harum formularum evolutio nullo modo in genere expediri potest, sed contenti esse debemus casus quosdam particulares resolvisse qui adeo etiam haud exiguam sagacitatem postulant: quemadmodum in aliquot dissertationibus fusius ostendi, ubi hoc argumentum omni studio pertractavi. Quare cum formula proposita $xy(x^4 - y^4)$, multo magis sit complicata, atque adeo binas illas formulas quasi in se complectatur, haud immerito dubitare licet, utrum ejus evolutio vires analyseos superet nec ne.

§. 2. Equidem ejus solutionem vix ausus essem suscipere, nisi felici quodam casu in solutionem difficillimi cujusdam problematis incidissem, quod binos hujusmodi numeros postulat formae

$$xy(x^4 - y^4),$$

quorum productum sit quadratum. Hinc enim ex solutione a me reperta licuit reciproce tales numeros assignare, qui conditioni propositae satisfacerent.



§. 3. Cum igitur isti problemati resolutionem quaestionis propositae acceptam referre oporteat haud abs re erit istud problema hic breviter commemorare; quanquam enim istud problema jam in *Tomo XV. novorum Commentatiorum* tractavi, hic solutionem multo faciliorem et elegantiorem sum traditurus. Problema autem ita erat enunciatum:

Invenire duos numeros, quorum productum sive auctum sive minutum tam summa quam differentia ipsorum numerorum producat numeros quadratos.

§. 4. Statuantur bini numeri quaesiti, quoniam integri esse nequeunt $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, atque necesse est, ut istae formulae:

$$xy \pm z(x+y) \quad \text{et} \quad xy \pm z(x-y)$$

fiant quadrata. Pro harum formularum priore ponamus $xy = aa + bb$, eique satisfiet, sumendo $z(x+y) = 2ab$. Simili modo, si pro posteriore ponamus $xy = cc + dd$, esse oportebit $z(x-y) = 2cd$. Efficiendum igitur est, ut bini valores pro xy assumti reddantur inter se aequales, sive ut fiat $aa + bb = cc + dd$. Deinde, cum ex priore sit $x + y = \frac{2ab}{z}$, ex posteriore vero $x - y = \frac{2cd}{z}$, hinc colligitur fore $x = \frac{ab + cd}{z}$ et $y = \frac{ab - cd}{z}$ quorum ergo productum $\frac{aabb - ccdd}{zz}$ ipsi $aa + bb$ ut et $cc + dd$ aequari debet, unde fieri oportebit $zz = \frac{aabb - ccdd}{aa + bb} = \frac{aabb - ccdd}{cc + dd}$. Cum igitur xy duplici modo in summam duorum quadratorum resolubile esse debeat, statuamus $xy = (pp + qq)(rr + ss)$ hincque pro formula priore $aa + bb$ accipiatur $a = pr + qs$ et $b = ps - qr$; pro posteriore vero $c = pr - qs$, tum vero $d = ps + qr$. Hinc ergo erit

$$ab + cd = 2rs(pp - qq) \quad \text{et} \quad ab - cd = 2pq(rr - ss)$$

unde prodibit $zz = \frac{4pqrs(pp - qq)(rr - ss)}{(pp + qq)(rr + ss)}$.

§. 5. Cum igitur haec fractio quadratum esse debeat, etiam productum ex numeratore in denominatorem, quod est

$$4pqrs\,(p^4 - q^4)\,(r^4 - s^4),$$

quadratum esse debebit, quod manifesto reducitur ad hoc productum

$$pq\,(p^4 - q^4) \;\times\; rs\,(r^4 - s^4),$$

vel etiam ista fractio $\frac{pq\,(p^4 - q^4)}{rs\,(r^4 - s^4)}$ ad quadratum reduci debebit, quae ergo est ea ipsa quaestio, quam hic enodandam suscepi.

§. 6. Cum autem istud problema mihi olim proponeretur pluribus tentaminibus frustra institutis tandem pro binis numeris quaesitis $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ hos elicui valores $\frac{13 \cdot 29^2}{8 \cdot 9^2}$ et $\frac{5 \cdot 29^2}{32 \cdot 11^2}$, ex quo casu vicissim pro litteris p, q, r, s conclusi istos valores:

$$p = 12, \quad q = 1, \quad r = 16 \quad \text{et} \quad s = 11,$$

qui quomodo nostrae quaestioni satisfaciant videamus. Erit igitur

$p = 12$	$r = 16$
$q = 1$	$s = 11$
$p + q = 13$	$r + s = 27$
$p - q = 11$	$r - s = 5$
$pp + qq = 5 \cdot 29$	$rr + ss = 13 \cdot 29.$

Hinc porro colligimus fore:

$$pq\,(p^4 - q^4) = 4 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 29$$
$$rs\,(r^4 - s^4) = 16 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29$$

unde concluditur $\frac{pq\,(p^4 - q^4)}{rs\,(r^4 - s^4)} = \frac{1}{4 \cdot 9}$.

§. 7. Cum igitur casus nobis constet, quo quaestioni hic propositae satisfit, ejus consideratio nos perducere poterit ad alias solutiones investigandas. Quam obrem quasdam notabiles relationes in valoribus inventis occurrentes observemus, ubi statim ista notabilis convenientia deprehenditur, quod formulae $pp + qq$ et $rr + ss$ communem habeant factorem 29, dum alteri factores sunt 5 et 13;

omnes scilicet summae duorum quadratorum, quemadmodum rei natura postulat.

§. 8. Ab hac igitur conditioni incipientes statuamus

$$pp + qq = (aa + bb)(xx + yy) \text{ et } rr + ss = (cc + dd)(xx + yy),$$

ita ut $xx + yy$ sit factor utrique formulae communis, atque hinc nanciscemur sequentes valores:

$$p = ax + by\,; \quad r = cx + dy$$
$$q = bx - ay\,; \quad s = dx - cy$$

ideoque:

$$p + q = (a + b)x + (b - a)y\,; \quad r + s = (c + d)x + (d - c)y$$
$$p - q = (a - b)x + (b + a)y\,; \quad r - s = (c - d)x + (d + c)y.$$

§. 9. Porro autem efficiamus, ut utrinque duo tantum termini se mutuo destruant, atque exemplum modo datum considerantes reperimus formulam $p - q = 11$ aequalem esse formulae $s = 11$, unde in genere istam aequalitatem statuamus $p - q = s$ hincque oritur ista aequatio: $(a - b)x + (b + a)y = dx - cy$ ex qua ratio inter x et y sponte definitur; fit enim $\frac{x}{y} = \frac{a + b + c}{d + b - a}$. Quamobrem in genere statuamus $x = a + b + c$ et $y = d + b - a$. Quamquam autem hoc modo quaestio restricta videatur, tamen re perpensa nulla plane restrictio est facta. Cum enim utrinque quaecunque multipla litterarum p et q itemque r et s perinde satisfaciant, semper talia multipla capere licebit ut fiat $p - q = s$.

§. 10. Praeterea etiam observasse juvabit, formulam $p + q$ in exemplo aequalem esse ipsi $cc + dd$; quamobrem in genere statuamus $p + q = cc + dd$, qua positione autem utique ingens restrictio introducitur. Substitutis ergo loco x et y valoribus modo inventis reperietur sequens aequatio:

$$(a + b)(a + b + c) + (b - a)(b - a + d) = cc + dd \text{ sive}$$
$$(a + b)^2 + c(a + b) + (b - a)^2 + d(b - a) = cc + dd$$

cui aequationi si utrinque addatur $\frac{1}{4}(cc + dd)$ prodibit ista:

$$(a + b + \tfrac{1}{2}c)^2 + (b - a + \tfrac{1}{2}d)^2 = \tfrac{5}{4}(cc + dd)$$

ubi in parte sinistra habetur summa duorum quadratorum. Evidens vero est membrum dextrum duplici modo summam duorum quadratorum continere scilicet vel $(c + \frac{1}{2}d)^2 + (d - \frac{1}{2}c)^2$ vel etiam $(c - \frac{1}{2}d)^2 + (d + \frac{1}{2}c)^2$. Hinc, prouti utrinque quodvis quadratum sive uni sive alteri aequale statuamus, quatuor hic occurrunt combinationes sequentes:

I.	II.
$a + b + \frac{1}{2}c = c + \frac{1}{2}d$	$a + b + \frac{1}{2}c = d - \frac{1}{2}c$
$b - a + \frac{1}{2}d = d - \frac{1}{2}c$	$b - a + \frac{1}{2}d = c + \frac{1}{2}d$
III.	**IV.**
$a + b + \frac{1}{2}c = c - \frac{1}{2}d$	$a + b + \frac{1}{2}c = d + \frac{1}{2}c$
$b - a + \frac{1}{2}d = d + \frac{1}{2}c$	$b - a + \frac{1}{2}d = c - \frac{1}{2}d.$

§. 11. Ex his autem quatuor casibus eum eligi convenit, qui cum exemplo congruat. At si formulas hactenus inventas cum exemplo conferamus reperiemus $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$, unde fit $x = 5$, $y = 2$, ita ut sit

$$xx + yy = 29;\ aa + bb = 5;\ cc + dd = 13;$$

hincque omnes reliqui valores cum exemplo prorsus convenient. Cum igitur sit $a + b + \frac{1}{2}c = 4$ et $b - a + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}$, eligatur ea combinatio, quae eosdem praebeat valores, at facile patebit quartam adhiberi debere. Habebimus ergo $a + b = d$, $b - a = c - d$, hincque litterae c et d ita per a et b definiuntur ut sit $c = 2b$ et $d = a + b$ ex quibus jam porro fit $x = a + 3b$; $y = 2b$. His igitur valoribus constitutis singuli factores utriusque formulae

$$pq(p + q)(p - q)(pp + qq) \text{ et } rs(r + s)(r - s)(rr + ss)$$

sequenti modo expressi reperiuntur

$$p = aa + 3ab + 2bb = (a+b)(a+2b)$$
$$q = 3bb - ab = b(3b-a)$$
$$p+q = aa + 2ab + 5bb$$
$$p-q = aa + 4ab - bb$$
$$pp+qq = (aa+bb)(xx+yy)$$

$$r = 4ab + 8bb = 4b(a+2b)$$
$$s = aa + 4ab - bb$$
$$r+s = aa + 8ab + 7bb = (a+b)(a+7b)$$
$$r-s = 9bb - aa = (3b+a)(3b-a)$$
$$rr-ss = (aa+2ab+5bb)(xx+yy).$$

§. 12. Conjungamus jam singulos factores utriusque formulae, ac reperiemus:

$$pq(p^4-q^4) = (a+b)(a+2b)b(3b-a)(aa+2ab+5bb) \times (aa+4ab-bb)(aa+bb)(xx+yy)$$
$$rs(r^4-s^4) = 4b(a+2b)(aa+4ab-bb)(a+b)(a+7b)(3b+a)(3b-a)(aa+2ab+5bb)(xx+yy).$$

Quod si ergo priorem per posteriorem dividamus erit

$$\frac{pq(p^4-q^4)}{rs(r^4-s^4)} = \frac{aa+bb}{4(a+7b)(3b+a)}.$$

Quamobrem, ut haec fractio quadrato aequetur, ejusmodi valores pro litteris a et b requiruntur, ut ista fractio $\frac{aa+bb}{(a+7b)(3b+a)}$ fiat quadratum, vel etiam ejus inversa $\frac{(a+3b)(a+7b)}{aa+bb}$, quod quidem pro nostro exemplo utique evenit, sumendo $a=2$ et $b=1$, tum enim hujus posterioris fractionis valor erit 9. Totum ergo negotium huc redit, ut ista fractio ad quadratum reducatur.

§. 13. Ponamus hic $\frac{a}{b}=t$, ut formula quadrato aequanda sit $\frac{(t+3)(t+7)}{tt+1}$ atque methodum prorsus singularem hic sum traditurus, ex quovis valore cognito innumeros alios inveniendi. Hunc in finem plures casus, qui quasi se sponte offerunt notasse juvabit qui sunt $t=2$, $t=1$, $t=-2$, $t=\infty$, $t=-3$, $t=-7$.

Quemadmodum igitur ex his valoribus cognitis alii novi elicere queant, hic ostendamus. Ante omnia autem productum ex numeratore in denominatorem est considerandum, quod est:

$$t^4 + 10t^3 + 22tt + 10t + 21$$

quod ergo ad quadratum reduci oportet.

§. 14. Quoniam hic tantum primus terminus est quadratum, ejus radicem ita fingamus, ut etiam secundus terminus tollatur; quare haec formula aequalis statuatur huic quadrato:

$$(tt + 5t + v)^2$$

hincque orietur sequens aequatio:

$$22tt + 10t + 21 = (2v + 25)tt + 10tv + vv,$$

quae reducitur ad hanc:

$$-3tt + 10t + 21 = 2vtt + 10tv + vv,$$

haecque aequatio duas continet litteras t et v, quarum utraque ad duas dimensiones assurgit, ideoque, dum altera ut cognita spectatur altera geminos valores recipiet, qui si indicentur per t et t', nec non per v et v' ex natura aequationum constat fore:

$$t + t' = \frac{10(1-v)}{2v+3}, \quad \text{tum vero} \quad v + v' = -2t(t+5),$$

quarum formularum ope simulac constent valores pro t et v inde novi pro iisdem litteris eruentur atque ex his simili modo denuo novi, ita ut tales operationes sine fine continuari queant.

§. 15. Cum igitur pro t jam cognitae sint aliquot valores, videamus quales valores ipsius v illis respondeant, quae determinatio ex ultima aequatione peti potest. Ita cum sit $t = 2$ haec aequatio evadet $vv + 28v = 29$, unde oriuntur hi duo valores $v = 1$ et $v = -29$. Pro secundo valore $t = 1$ oritur $v = 2$ et $v = -14$. Pro tertio valore $t = -2$ prodit $v = 1$ et $v = 11$. Pro quarto $t = \infty$ ambo termini quadratum tt continentes se debent destruere, sicque erit $2v = -3$ sive $v = -\frac{3}{2}$, tum vero huic valori $v = -\frac{3}{2}$ respondet valor

$t = -\frac{3}{4}$. Pro quinto valore $t = -3$ nanciscimur valorem $v = 6$. Denique casus $t = -7$ praebet $v = -14$.

§. 16. Quod si jam bini hujusmodi valores pro litteris t et v accipiantur, ex iis novi formabuntur ope harum formularum:

$$t' = \frac{10(1-v)}{2v+3} - t; \quad v' = -2t(t+5) - v.$$

Incipiamus igitur a casu $t = 2$ et $v = 1$ atque tota operatio sequenti modo procedet:

$$t = 2, \quad -2, \quad -2, \qquad 2, \ \frac{-82}{11}, \ \frac{262}{649},$$

$$v = 1, \qquad 11, \qquad 1, \ -29, \ \frac{-979}{121}.$$

In hac operatione jam continentur casus initio cogniti unde hos jam praetermittere poterimus.

§. 17. Progrediamur igitur ad casum quartum quo $v = -\frac{3}{2}$ et $t = -\frac{3}{4}$, ubi valores pro v et z inverso modo scribere debemus, quia alias t' prodiret $= \infty$. Operatio igitur ita se habebit:

$$v = -\frac{3}{2}, \qquad \frac{63}{8}, \ \frac{77}{18}, \ -\frac{164 \cdot 27}{11 \cdot 11},$$

$$t = -\frac{3}{4}, \ -\frac{35}{12}, \ \frac{95}{312}.$$

§. 18. Sumamus nunc $t = -3$ et $v = 6$, similique modo operationem instituendo orientur hi valores:

$$t = -3, \ -\frac{1}{3}, \ -\frac{41}{3}, \qquad \frac{267}{31},$$

$$v = \quad 6, \ -\frac{26}{9}, \ -9 \cdot 26.$$

Possunt etiam termini initiales inverti hoc modo:

$$v = \quad 6, \quad 6, \ -\frac{26}{9}, \ -9 \cdot 26,$$

$$t = -3, \ -\frac{1}{3}, \ -\frac{41}{3}.$$

Evidens autem est, hinc nullos novos valores emergere cum omnes in praecedente serie jam contineantur.

§. 19. Evolvamus denique casum ultimum quo $t = -7$ et $v = -14$ pro quo sequentes valores eruuntur:

$$t = -7, \; 1, \; -\frac{17}{7}, \; \frac{503}{7 \cdot 47},$$

$$v = -14, \; 2, \; \frac{514}{49}.$$

Primis autem terminis v et t inverso modo positis fit:

$$v = -14, \; -14, \; 2, \; \frac{514}{49},$$

$$t = -7, \; 1, \; -\frac{17}{7}, \; \frac{503}{329},$$

qui autem numeri jam in praecedente serie occurrunt. Ceterum notandum est, casum secundum, quo $t = 1$ et v vel $= 2$ vel $= -14$ etiam hic reperiri, qui casus supra erat praetermissus.

§. 20. Valores ergo idonei per has operationes pro t inventi sequenti modo se habebunt:

I. $t = 2$; II. $t = -2$; III. $t = -\frac{82}{11}$; IV. $t = \frac{262}{649}$;
V. $t = -\frac{3}{4}$; VI. $t = -\frac{35}{12}$; VII. $t = \frac{25}{312}$; VIII. $t = -3$;
IX. $t = -\frac{1}{3}$; X. $t = -\frac{41}{3}$; XI. $t = \frac{267}{31}$; XII. $t = -7$;
XIII. $t = 1$; XIV. $t = -\frac{17}{7}$; XV. $t = \frac{503}{329}$.

Horum igitur valorum singuli suppeditant solutionem quaestionis propositae; quemadmodum in sequente problemate ostendemus.

Ex quolibet valore idoneo pro t *invento assignare quatuor numeros* p, q, r, s, *ita ut productum sive quotus harum formularum* $pq(p^4 - q^4)$ *et* $rs(r^4 - s^4)$ *fiat quadratum.*

Solutio.

§. 21. Cum sit $\frac{a}{b}$, habebuntur quoque ambo numeri a et b in integris, ex quibus litterae p, q, r, s cum derivatis sequenti modo determinabuntur:

$p = (a+b)(a+2b)$	$r = 4b(a+2b)$
$q = b(3b-a)$	$s = aa+4ab-bb$
$p+q = aa+2ab+5bb$	$r+s = (a+b)(a+7b)$
$p-q = aa+4ab-bb$	$r-s = (3b+a)(8b-a)$
$pp+qq = (aa+bb)(x^2+y^2)$	$rr+ss = (aa+2ab+5bb)(x^2+y^2)$
$= (aa+bb)(aa+6ab+13bb)$	$= (aa+2ab+5bb)(aa+6ab+13bb)$.

§. 22. Circa has formulas observandum est 1°) si quispiam numerorum p, q, r, s, prodierit negativus, ejus loco semper positivum scribi posse; 2°) si prodierit vel $q > p$ vel $s > r$ hos valores inter se semper permutari posse, ita ut littera p indicet numerum majorem, q vero minorem, similique modo r majorem et s minorem; 3°) si eveniat ut numeri p et q habeant communem divisorem, eum per divisionem semper tollere licet, quod idem de litteris r et s est tenendum. 4°) Evidens quoque est, tam loco binarum litterarum p et q quam r et s eorum summam et differentiam scribi posse: Si enim ponamus

$$P = p + q, \quad Q = p - q, \quad R = r + s, \quad S = r - s$$

fiet $PQ(P^4 - Q^4) = 8pq(p^4 - q^4)$ similique modo

fiet $RS(R^4 - S^4) = 8rs(r^4 - s^4)$,

ideoque et harum novarum formularum sive quotus sive productum erit etiam quadratum. 5°) Ista transformatio insignem usum praestat, si litterae p, q, r, s fuerint impares; tum enim litterae majusculae P, Q, R, S deprimi possunt, sicque ad minores numeros pervenietur: nam si ponamus

$$P = \frac{p+q}{2}, \quad Q = \frac{p-q}{2}, \quad R = \frac{r+s}{2}, \quad S = \frac{r-s}{2}$$

fiet $PQ(P^4 - Q^4) = \frac{pq(p^4-q^4)}{8}$ et $RS(R^4 - S^4) = \frac{rs(r^4-s^4)}{8}$.

Secundum haec ergo praecepta pro valoribus ipsius t inventis litteras p, q, r, s in sequentibus exemplis assignemus.

Exemplum 1,

quo $t = 2$.

§. 23. Hic ergo erit $a = 2$ et $b = 1$ hincque fiet

$p = 3 . 4$, $q = 1$, $r = 4 . 4$, $s = 11$,

qui ergo cum suis derivatis ita disponantur:

$p = 4 . 3$	$r = 4 . 4$
$q = 1$	$s = 11$
$p + q = 13$	$r + s = 3 . 9$
$p - q = 11$	$r - s = 5$
$pp + qq = 5 . 29$	$rr + ss = 13 . 29$.

Casus porro $t = -2$ et $t = 1$, $t = -3$, $t = -7$, $t = -\frac{1}{3}$, hic omittamus, quia solutiones incongruas praeberent.

Exemplum 2,

quo $t = -\frac{3}{4}$.

§. 24. Cum igitur sit $a = -3$ et $b = 4$, fiet hoc casu

$p = 1$	$r = 4 . 4$
$q = 4 . 3$	$s = 11$
$p + q = 13$	$r + s = 27$
$p - q = 11$	$r - s = 5$
$pp + qq = 5 . 29$	$rr + ss = 13 . 29$,

qui autem valores cum praecedentibus tantum in eo dissentiunt ut p et q sint permutati; hinc ergo nulla nova solutio emergit.

Exemplum 3.

quo $t = -\frac{17}{7}$.

§. 25. Hic ergo sumi debet $a = -17$, $b = 7$ unde hi valores orientur per 2 et 4 scil. depressi:

$p = 3 \cdot 5 \quad r = 3 \cdot 7$
$q = 7 \cdot 19 \quad s = 59.$

Jam quia omnes hi numeri sunt impares, eorum loco scribantur semi-summae et semi-differentiae sicque haec nova problematis solutio orietur:

$p = 2 \cdot 37$	$r = 40$
$q = 59$	$s = 19$
$p + q = 133$	$r + s = 59$
$p - q = 15$	$r - s = 21$
$pp + qq = 53 \cdot 169$	$rr + ss = 53 \cdot 37.$

Ubi omnes factores non quadrati se utrinque destruunt.

Exemplum 4,

quo $t = -\frac{41}{3}$.

§. 26. Sumto hic $a = -41$ et $b = 3$ valores p, q, r, s, quantum licet depressi erunt:

$p = 7 \cdot 19; \quad q = 3 \cdot 5; \quad r = 3 \cdot 7; \quad s = 59,$

qui casus cum praecedente perfecte congruit.

Exemplum 5,

quo $t = -\frac{35}{12}$.

§. 27. Cum igitur sumi debeat $a = -35$ et $b = 12$ valores pro p, q, r, s, hinc erunt:

$p = 12 \cdot 71 = 852$	$r = 599$
$q = 11 \cdot 23 = 253$	$s = 11 \cdot 48 = 528$
$p + q = 5 \cdot 21$	$r + s = 23 \cdot 49$
$p - q = 599$	$r - s = 71$
$pp + qq = 37^2 \cdot 577$	$rr + ss = 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 577,$

ubi iterum omnes factores non quadrati utrinque occurrunt. Ean-

dem porro solutionem resultare ex casu $t = -\frac{82}{11}$ inde patet, quod

$$82^2 + 11^2 = 5\,(35^2 + 12^2).$$

§. 28. Praeter casum ergo jam pridem cognitum quo

$$p = 12,\quad q = 1,\quad r = 16,\quad s = 11,$$

qui nobis instar normae in hac investigatione inserviit duas alias novas solutiones sumus adepti, quae numeris non nimis magnis constant. Reliqui vero quatuor casus pro t inventi:

$$\frac{25}{342},\quad \frac{267}{31},\quad \frac{503}{379},\quad \frac{262}{649}$$

perducerent ad numeros nimis magnos, quos operae non est pretium evolvere. Ceterum in his operationibus plura occurrunt calculi artificia vix adhuc cognita quibus Analysis non exigua incrementa accipere est censenda.

§. 29. Hinc jam Problema in Tomo XV. nov. Comment. tractatum multo commodius et concinnius resolvi ac per numeros absolutos expediri poterit, quam solutionem hic subjungo.

Problema.

Invenire duos numeros, quorum productum sive auctum sive minutum tam summa quam differentia ipsorum numerorum, producat numeros quadratos.

Solutio.

§. 30. Positis numeris quaesitis $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ supra jam vidimus esse $x = \frac{ab + cd}{z}$ et $y = \frac{ab - cd}{z}$ deinde introductis litteris $p, q, r, s,$ erat

$$ab + cd = 2rs\,(pp - qq) \text{ et } ab - cd = 2pq\,(rr - ss).$$

Quamobrem numeri quaesiti erunt:

$$\frac{x}{z} = \frac{2rs\,(pp - qq)}{zz} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{2pq\,(rr - ss)}{zz}.$$

Invenimus autem porro esse $zz = \frac{4pqrs(pp-qq)(rr-ss)}{(pp+qq)(rr+ss)}$ quo valore substituto ambo numeri quaesiti erunt:

$$\frac{x}{z} = \frac{(pp+qq)(rr+ss)}{2pq(rr-ss)} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{(pp+qq)(rr+ss)}{2rs(pp-qq)}.$$

§. 31. Quoniam igitur supra in exemplis tres solutiones in numeris absolutis dedimus, si ex iis valores pro litteris p, q, r, s depromamus, sequentes tres solutiones numericas nanciscemur.

I. Solutio,

ex §. 23. petita.

$$\frac{x}{z} = \frac{5.29.13.29}{2.12.3.9.5} = \frac{13.29^2}{8.9^2}$$
$$\frac{y}{z} = \frac{5.29.13.29}{13.11.32.11} = \frac{5.29^2}{32.11^2},$$

quae est solutio a me primum inventa.

II. Solutio,

ex §. 25. petita.

$$\frac{x}{z} = \frac{53.169.53.37}{4.37.59.59.21} = \frac{13^2.53^2}{3.4.7.59^2}$$
$$\frac{y}{z} = \frac{53.169.53.37}{38.40.133.15} = \frac{37.13^2.53^2}{3.7.4^2.5^2.19^2}.$$

III. Solutio,

ex §. 27. petita.

$$\frac{x}{z} = \frac{37^2.577.5.13.17.577}{24.71.11.23.23.49.71} = \frac{5.13.17.37^2.577^2}{11.24.7^2.23^2.71^2}$$
$$\frac{y}{z} = \frac{37^2.577.5.13.17.577}{2.528.599.5.21.599} = \frac{13.17.37^2.577}{6.7.528.599^2}.$$

§. 32. Subjungam hic curiositatis gratia adhuc solutionem maximis numeris contentam, quam suppeditat casus supra inventus

§, 20., scilicet $t = \frac{25}{312}$, unde fit $a = 25$ et $b = 312$. Hinc autem deducuntur sequentes valores:

$p = 3 . 8 . 13 . 911$	$r = 3 . 11 . 13 . 32 . 59$
$q = 11 . 59 . 337$	$s = 65519$
$p + q = 5 . 17 . 61 . 97$	$r + s = 31^2 . 911$
$p - q = 65519$	$r - s = 337 . 47^2$
$pp + qq = 313^2 . 1312897$	$rr + ss = 5 . 17 . 61 . 97 . 1312897,$

ex quibus numeri quaesiti erunt:

$$\frac{x}{z} = \frac{5 . 17 . 61 . 97 . 313^2 . 1312897^2}{3 . 11 . 13 . 59 . 4^2 . 31^2 . 47^2 . 337^2 . 911^2}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{313^2 . 1312897^2}{3 . 11 . 13 . 8^2 . 59 . 65519^2} .$$

IV.

DE BINIS NUMERIS

QUORUM SUMMA SIVE AUCTA SIVE MINUTA TAM UNIUS QUAM ALTERIUS QUADRATO PRODUCAT QUADRATA.

Conventui exhibita die 14. Aug. 1780.

§. 1.

Quod si bini numeri quaesiti ponantur $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ has duas formulas ambiguas: $\frac{x+y}{z} \pm \frac{xx}{zz}$ et $\frac{x+y}{z} \pm \frac{yy}{zz}$ quadrata effici oportet. Hinc ergo per zz multiplicando hae duae formulae: $(x+y)z \pm xx$ atque $(x+y)z \pm yy$ quadratis aequari debeunt. His autem conditionibus satisfaciunt hi numeri, qui sine dubio sunt minimi:

$$x = 9028 = 4.37.61, \quad y = 3124 = 4.11.71 \text{ et } z = \frac{5.37^2.61^2}{2.49.31}.$$

Tum enim erit

$$(x+y)z = 20.37^2.61^2 \text{ et } xx = 16.37^2.61^2,$$

quorum numerorum summa est $6^2.37^2.61^2$ et differentia $2^2.37^2.61^2$; tum vero est $yy = 16.11^2.71^2$ unde per 4 dividendo ostendendum est tam summam quam differentiam horum numerorum:

$$5.37^2.61^2 \text{ et } 4.11^2.71^2$$

esse quadrata. Cum autem sit $5 = 2^2 + 1^2$; $37^2 = 35^2 + 12^2$ et $61^2 = 60^2 + 11^2$ erit $5.37^2 = 82^2 + 11^2$, hincque porro $5.37^2.61^2 = 5041^2 + 242^2$ cui summae quadratorum sive addatur sive subtrahatur duplum radicum productum quod est

$$2.242.5041 = 4.11^2.71^2.$$

qui est ipse numerus sive addendus sive subtrahendus.

Analysis ad hanc solutionem ducens.

§. 2. Numerus $(x+y)z$ duplici modo statuatur summa duorum quadratorum scilicet $= A^2 + B^2$ et $= C^2 + D^2$, atque manifestum est quaesito satisfieri, si fuerit $xx = 2AB$ et $yy = 2CD$. Hunc in finem fiat $(x+y)z = (aa+bb)(cc+dd)$, unde deducitur $A = ac + bd$ et $B = ad - bc$; tum vero $C = ad + bc$ et $D = ac - bd$, sicque habebimus

$$xx = 2(ac+bd)(ad-bc) \text{ et } yy = 2(ad+bc)(ac-bd).$$

Ut jam hae formulae evadant quadrata ponatur $x = (ac+bd)f$ et $y = (ad+bc)g$, factaque evolutione prodibunt hae aequationes:

$$2(ad-bc) = (ac+bd)ff \text{ et } 2(ac-bd) = (ad+bc)gg$$

ex quarum priore deducitur $\frac{a}{b} = \frac{2c+dff}{2d-cff}$, ex posteriore vero $\frac{a}{b} = \frac{2d+cgg}{2c-dgg}$. Hi autem valores inter se coaequati praebent hanc aequationem:

$$cc(4+ffgg) + 4cd(ff-gg) = dd(4+ffgg)$$

unde radice extracta reperitur:

$$\frac{d}{c} = \frac{2(ff-gg) \pm \sqrt{4(ff-gg)^2 + (4+ffgg)^2}}{4+ffgg} \quad \text{sive}$$

$$\frac{d}{c} = \frac{2(ff-gg) \pm \sqrt{(4+f^4)(4+g^4)}}{4+ffgg}.$$

§. 3. Totum ergo negotium huc redit, ut hoc productum $(4+f^4)(4+g^4)$ quadratum reddatur et, quia duas quantitates f et g continet, alterutram pro lubitu accipere licebit. Sumamus ergo $g = 1$ fietque $\frac{d}{c} = \frac{2(ff-1) \pm \sqrt{5(4+f^4)}}{4+ff}$; tum vero regrediendo erit $\frac{a}{b} = \frac{2d+c}{2c-d}$, porroque $(ac+bd)f$ et $y = ad + bc$. Denique autem habebimus $z = \frac{(aa+bb)(cc+dd)}{x+y}$.

§. 4. Ponatur nunc $\sqrt{5(4+f^4)} = 5v$, ut sit

$$\frac{d}{c} = \frac{2(ff-1) \pm 5v}{4+ff}.$$

Erit ergo $25vv = 20 + 5f^4$, quae ergo formula casu $f = 1$ commode fit quadratum hoc vero modo ad solutionem incongruam perveniretur. Ut igitur alii valores pro f eruantur ponamus:

$f = 1 + t$. fietque $25vv = 25 + 20t + 30tt + 20t^3 + 5t^4$

cujus radix statuatur $5 + \alpha t + \beta tt$ et erit

$$20 + 30t + 20tt + 5t^3 = 10\alpha + (10\beta + \alpha\alpha)t + 2\alpha\beta tt + \beta\beta t^3.$$

Ut nunc bina membra priora se destruant fieri debet $\alpha = 2$, atque ut etiam secunda se destruant sumi oportet $\beta = \frac{13}{5}$, sicque habebimus $5v = 5 + 2t + \frac{13}{5}tt$ et nunc tandem remanent membra tertium et quartum quae denuo per tt divisa praebent $t = \frac{60}{11}$. Ex quo valore invento colligitur $5v = \frac{11285}{121}$; tum vero est $f = \frac{71}{11}$ ex quibus valoribus colligitur $\frac{d}{c} = \frac{2(71^2 - 11^2) \pm 11285}{4 \cdot 11^2 + 71^2}$ unde sumto signo superiore oritur $\frac{d}{c} = \frac{21125}{5525} = \frac{845}{221} = \frac{5 \cdot 169}{13 \cdot 17}$. Sumamus igitur $d = 5 \cdot 169$ et $c = 13 \cdot 17$ eritque $\frac{a}{b} = \frac{147}{31}$. Sumto ergo $a = 147$ et $b = -31$, fiet $x = 4 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 71$ et $y = 4 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 61$. Hinc ergo colligitur $x + y = 4 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 31$ ideoque $z = \frac{5 \cdot 13 \cdot 37^2 \cdot 61^2}{2 \cdot 49 \cdot 31}$ ob $aa + bb = 10 \cdot 37 \cdot 61$ et $cc + dd = 13^2 \cdot 2 \cdot 37 \cdot 61$. Cum igitur hi tres numeri x, y, z habeant factorem communem 13, eo per divisionem sublato, valores harum litterarum ita fient simpliciores:

$$x = 4 \cdot 11 \cdot 71; \quad y = 4 \cdot 37 \cdot 61; \quad z = \frac{5 \cdot 37^2 \cdot 61^2}{2 \cdot 49 \cdot 31}$$

unde ipsi numeri quaesiti jam erunt:

$$\frac{x}{z} = \frac{8 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 49 \cdot 71}{5 \cdot 37^2 \cdot 61^2} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{8 \cdot 31 \cdot 49}{5 \cdot 37 \cdot 61},$$

qui sunt ipsi numeri initio allati. Quemadmodum autem hi numeri ex hypothesi $g = 1$ sunt deducti, simili modo ex alio quovis valore pro g assumto solutiones investigari poterunt. Quae autem mox ad immensos numeros excrescent. Ceterum notandum est, sumto $g = 2$, eandem solutionem prodituram fuisse, cum $g^4 + 4 = 4 \cdot 5$ ubi quaternarius per operationes sequentes iterum ex calculo excedit.

V.

DILUCIDATIONES

CIRCA BINAS SUMMAS DUORUM BIQUADRATORUM INTER SE AEQUALES.

Conventui exhibita die 28. Aug. 1780.

§. 1.

In Tomo Novor. Commentariorum XVII. pag. 64. ostendi, exhiberi posse duas binorum biquadratorum sive summas sive differentias, quae sint inter se aequales, quod quidem initio non parum paradoxon videbatur. Cum enim tales formulae $A^2 \pm B^2 = 0$; $A^3 \pm B^3 \pm C^3 = 0$ demonstratae sint impossibiles, siquidem termini vel aequales vel evanescentes excludantur, videri poterat, etiam hanc formulam:

$$A^4 \pm B^4 \pm C^4 \pm D^4 = 0,$$

atque adeo etiam pro superibus potestatibus

$$A^5 \pm B^5 \pm C^5 \pm D^5 \pm E^5 = 0 \text{ et } A^6 \pm B^6 \pm C^6 \pm D^6 \pm E^6 \pm F^6 = 0; \text{ etc.}$$

esse impossibiles. Nunc autem certi sumus, pro biquadratis hanc aequalitatem $A^4 + B^4 - C^4 - D^4 = 0$ subsistere posse, ideoque conjecturam illam neutiquam valere, cum loco citato hujusmodi quatuor biquadrata pluribus modis dari posse, ostenderim. Numeri autem quos ibi inveni tam sunt praegrandes, ut veritas difficulter explorari potest; cum minimi numeri quos invenire potui, ut fiat

$$A^4 + B^4 = C^4 + D^4, \quad \text{erant}$$

$$A = 477069; \; B = 8497; \; C = 310319; \; D = 428397.$$

§. 2. Nuper autem, longe alia agens, casu fortuito incidi in tales numeros longe minores qui sunt

$$A = 542; \; B = 514; \; C = 359; \; D = 103,$$

qui quomodo satisfaciant huic aequationi $A^4 - B^4 = C^4 - D^4$ hoc modo exploratur. Cum sit

$A + B = 1056 = 32 . 3 . 11$	$C + D = 462 = 2 . 3 . 7 . 11$
$A - B = 28 = 4 . 7$	$C - D = 256 = 2^8$
$AA - BB = 2^7 . 3 . 7 . 11$	$CC - DD = 2^9 . 3 . 7 . 11$

erit $AA - BB : CC - DD = 1 : 4$, quocirca summae quadratorum reciprocam tenere debent rationem, ita ut sit

$$A^2 + B^2 : C^2 + D^2 = 4 : 1,$$

quod revera evenire ita commodissime ostenditur. Cum sit

$$AA + BB = 4CC + 4DD \text{ erit } AA - 4DD = 4CC - BB$$

sive $(A + 2D)(A - 2D) = (2C + B)(2C - B)$. Est autem

$$A + 2D = 748 = 4 . 11 . 17, \quad A - 2D = 2^4 . 3 . 7,$$
$$2C + B = 1232 = 2^4 . 7 . 11; \quad 2C - B = 2^2 . 3 . 17$$

ideoque

$$AA - 4DD = 2^6 . 3 . 7 . 11 . 17 \text{ et } 4CC - BB = 2^6 . 3 . 7 . 11 . 17$$

ergo $AA - 4DD = 4CC - BB$.

§. 3. Hic autem fateri cogor me nulla certa methodo ad hos numeros esse deductum, neque adhuc perspicio, quomodo per viam directam ad eos perveniri queat. Quamobrem operae pretium fore arbitror, totam Analysin, qua sum usus hic explicare. Cum inde haud contemnenda incrementa in Analysin redundandura videantur; sequente igitur modo calculum institui.

§. 4. Cum esse debeat

$$(aa + bb)(aa - bb) = (cc + dd)(cc - dd)$$

hinc formo has duas aequationes

$$(aa + bb)p = (cc + dd)q \text{ et } (aa - bb)q = (cc - dd)p;$$

quarum priore ducta in p posteriore vero in q, earum summa praebet $2pqcc = aa(pp + qq) + bb(pp - qq)$, at differentia praebet $2pqdd = aa(qq - pp) - bb(qq + pp)$ unde patet esse debere $q > p$ ideoque harum aequationem utraque resolutionem admittit, si fuerit $qq - pp$ quadratum; quamobrem ponamus statim

$qq - pp = ss$ ac prior aequatio hoc modo referatur:

$$bbss = aa(pp + qq) - 2ccpq,$$

quae ut ad quadratum reduci queat hac forma repraesentetur

$$bbss = aa(q - p)^2 + 2pq(aa - cc).$$

Hinc jam statuamus

$$bs = a(q - p) + 2p(a - c)x.$$

Hinc igitur ob bines terminos primos se destruentes, si reliqui per $2p(a - c)$ dividantur, prodibit haec aequatio:

$$2p(a - c)xx + 2a(q - p)x = q(a + c),$$

unde deducitur $\frac{a}{c} = \frac{2pxx + q}{2pxx + 2(q - p)x - q}$; quocirca statuamus

$$a = 2pxx + q \text{ et } c = 2pxx + 2(q - p)x - q,$$

unde deducitur $bs = q(q - p) + 4pqx - 2p(q - p)xx$.

§. 5. Aggrediamur jam alteram aequationem quam ut fractiones evitemus ita referamus

$$2ddpqss = aas^4 - bbss(pp + qq);$$

ubi si loco a et sb valores modo inventos substituamus, ob $ss = qq - pp$ omnes termini per $2pq$ divisibiles prodibunt orieturque sequens aequatio:

$$\begin{aligned} ddss = {} & qq(q - p)^2 - 4q(q - p)(qq + pp)x + 2(qq - pp)^2 xx \\ & + 2(qq - 6pq + pp)(pp + qq)xx + 8p(q - p)(pp + qq)x^3 \\ & + 4p^2(q - p)^2 x^4, \end{aligned}$$

in qua formula tam primus quam ultimus terminus sunt quadrata, eamque idcirco secundum praecepta cognita pluribus modis tractare licebit.

§. 6. Quoniam autem hujus formulae evolutio in genere non parum esset taediosa, casum tantum simplicissimum evolvamus, quo $qq - pp$ fit quadratum, quod evenit sumendo $p = 3$ et $q = 5$, unde fit $ss = 16$ et $s = 4$. Hoc igitur casu valores supra inventi evadent $a = 6xx + 5$; $c = 6xx + 4x - 5$ et $4b = 10 + 60x - 12xx$ sive $2b = 5 + 30x - 6xx$. Nunc vero formula pro quarta littera d invenienda erit:

$$16dd = 100 - 1360x - 3296xx + 1632x^3 + 144x^4$$ seu
$$4dd = 25 - 340x - 824xx + 408x^3 + 36x^4,$$
atque denuo per 4 dividendo prodibit:
$$dd = \frac{25}{4} - 85x - 206xx + 102x^3 + 9x^4.$$

§. 7. Ponamus hic primo secundum praecepta solita
$$d = \frac{5}{2} - 17x \pm 3xx,$$ eritque
$$dd = \frac{25}{4} - 85x \pm (289 \pm 15)xx \mp 102x^3 + 9x^4$$
ubi termini primus, secundus et ultimus tolluntur simul vero penultimus si signum inferius valeret indeque nihil concludi posset, quamobrem valeat signum superius, ut sit $d = \frac{5}{2} - 17x + 3xx$, atque hinc orietur ista aequatio:
$$304xx - 102x^3 = -206xx + 102x^3$$
unde fit $x = \frac{510}{204} = \frac{5}{2}$. Hinc ergo valores nostri erunt:
$$a = \frac{85}{2};\ c = \frac{85}{2};\ b = \frac{85}{4};\ d = -\frac{85}{4}.$$
Hinc ergo foret $c^4 = a^4$ et $d^4 = b^4$, quae solutio jam per se est obvia.

§. 8. Statuamus $d = 3xx + 17x \pm \frac{5}{2}$ eritque
$$dd = 9x^4 + 102x^3 + (289 \pm 15)xx \pm 85x + \frac{25}{4},$$
ubi statim patet, signum superius valere debere, unde prodit aequatio haec: $304xx + 85x = -85x - 206xx$ unde fit $x = -\frac{17}{51} = -\frac{1}{3}$. Hinc porro colligitur $a = \frac{17}{3}$; $c = -\frac{17}{3}$. Ergo iterum foret $c^4 = a^4$ ideoque necessario etiam $d^4 = b^4$; unde nihil sequeretur.

§. 9. Statuamus $d = \frac{5}{2} - 17x + \alpha xx$ eritque
$$dd = \frac{25}{4} - 85x + (5\alpha + 289)xx - 34\alpha x^3 + \alpha\alpha x^4$$
ubi α ita sumi oportet, ut priores tres termini tollantur ideoque $\alpha = -99$, et reliqua aequatio per x^3 divisa erit
$$9801x + 3366 = 102 + 9x$$
unde fit $x = -\frac{3264}{9792} = -\frac{1}{3}$ ut in casu praecedente, unde jam novimus hinc nihil ad scopum nostrum sequi.

§. 10. Statuamns denique $d = 3xx + 17x + \alpha$ ubi α ita definiatur, ut terminus medius destruatur. Cum igitur sit

$$dd = 9x^4 + 102x^3 + (289 + 6\alpha)xx + 34\alpha x + \alpha\alpha$$

fieri debet $289 + 6\alpha = -206$ ideoque $\alpha = -\frac{165}{2}$, tum vero reliqua aequatio erit $-17 . 165x + \frac{165^2}{4} = -85x + \frac{25}{4}$ unde fit $x = \frac{5}{2}$, uti in casu primo, sicque iterum isto casu mni successu caret.

§. 11. Cum igitur hactenus nihil ad scopum nostrum simus assecuti secundum praecepta vulgaria oporteret formulam biquadraticam inventam ita transformare, ut ponatur vel $x = \frac{5}{2} + y$, vel $x = -\frac{1}{3} + y$, hocque modo perveniremus ad alias formas biquadraticas ejusdem indolis, quae secundum casus praecedentes tractatae utique largirentur valores idoneos pro y, verum inde pro litteris a, b, c, d numeri vehementer magni essent prodituri neque ulla solutio simplicior illa, quam olim dederam, sperari posset, multo minus hinc solutio simplex nuper inventa inde exspectari posset.

§. 12. In his operationibus loco dd tale quadratum assumitur, quo subtracto aequatio simplex relinquatur valorem ipsius x praebens, unde intelligitur, pro dd etiam tale quadratum assumi posse, quo subtracto aequatio quadratica relinquatur, dummodo ea radices habeat rationales, id quod in hac aequatione generali usu venire observavi:

$$\alpha\alpha + 2\alpha\beta x + \gamma xx + 2\delta\varepsilon x^3 + \varepsilon\varepsilon x^4 = zz,$$

quoties fuerit $\beta\beta + \delta\delta - \gamma$ quadratum, sive quoties fuerit $\gamma = \beta\beta + \delta\delta - \zeta\zeta$, quod ergo accuratius prosequamur.

§. 13. Sumamus pro zz hoc quadratum: $(\alpha + \beta x)^2$ quo ab illa forma subtracto, remanebit haec quantitas:

$$xx(\gamma - \beta\beta + 2\delta\varepsilon x + \varepsilon\varepsilon xx),$$

quae ob $\gamma - \beta\beta = \delta\delta - \zeta\zeta$ transit in hanc formam

$$xx\,((\delta + \varepsilon x)^2 - \zeta\zeta),$$

ita ut sit $zz = (\alpha + \beta x)^2 + xx\,(\varepsilon x + \delta + \zeta)\,(\varepsilon x + \delta - \zeta)$; unde patet, duplici modo fieri $z = \alpha + \beta x$, scilicet si fuerit vel $x = -\frac{\delta - \zeta}{\varepsilon}$ vel $x = -\frac{\delta + \zeta}{\varepsilon}$, sicque hoc modo duos valores pro x adipiscimur, qui per vulgarem operationem non reperientur. Idem commodum eveniet si pro zz sumamus hoc quadratum $(\varepsilon x + \delta)^2 xx$. Hoc enim sublato remanet: $\alpha\alpha + 2\alpha\beta x + (\gamma - \delta\delta)xx$, hoc est $(\alpha + \beta x)^2 - \zeta\zeta xx$ ita ut sit in genere

$$xx\,(\varepsilon x + \delta)^2\,((\beta - \zeta)\,x + \alpha)\,((\beta + \zeta)\,x + \alpha);$$

unde patet revera fieri $z = x\,(\varepsilon x + \delta)$, quoties fuerit vel

$$x = -\frac{\alpha}{\beta - \zeta} \text{ vel } x = -\frac{\alpha}{\beta + \zeta},$$

ita ut hoc casu omnino quatuor novi valores pro x reperiri queant.

§. 14. Videamus igitur utrum nostra aequatio:

$$\tfrac{25}{4} - 85\,x - 206\,xx + 102\,x^3 + 9\,x^4 = dd,$$

in illa forma generali contineatur nec ne. Comparatione autem instituta fiet $\alpha = \frac{5}{2}$; $\beta = -17$; $\gamma = -206$; $\delta = 17$; $\varepsilon = 3$. Erit ergo $\beta\beta + \delta\delta - \gamma = 28^2$ ideoque $\zeta = 28$, quo circa quatuor novi valores pro x resultantes erunt:

$$x = -15;\quad x = +\tfrac{11}{9};\quad x = \tfrac{1}{18};\quad x = +\tfrac{5}{22}.$$

Hic autem probe notandum est, hunc egregium consensum exemplo tantum deberi, quo posuimus $p = 3$ et $q = 5$. Sin autem his litteris p et q alios tribuamus valores, ita tamen, ut $qq - pp$ evadat quadratum, rarissime iste consensus locum habebit.

§. 15. Evolvamus igitur nunc hos valores ope hujus methodi prorsus singularis inventos. Sit primo $x = -15$, quo casu fit $d = \alpha + \beta x = \frac{515}{2}$; reliquae vero litterae reperientur $a = 1355$; $b = \frac{1795}{2}$; $c = 1285$, qui numeri cum sint omnes per 5 divisibiles, ad minimos terminos revocabuntur in integris multiplicando per $\frac{2}{5}$, tum igitur quatuor nostri numeri quaesiti erunt:

$a = 542;\ b = 359;\ c = 514;\ d = 103,$

qui sunt illi ipsi, quos initio exhibueram.

§. 16. Secundus valor pro x inventus erat $x = \frac{11}{3}$; ubi fit $d = \alpha + \beta x = -\frac{359}{6}$. Reliqui porro valores erunt:

$a = \frac{257}{3};\ b = \frac{103}{6};\ c = \frac{271}{3},$

qui per 6 multiplicati ad hos numeros revocantur:

$a = 514;\ b = 103;\ c = 542;\ d = 359,$

qui cum praecedentibus conveniunt.

§. 17. Consideremus nunc tertium valorem $x = \frac{1}{18}$, pro quo erit $d = x(\varepsilon x + \delta) = \frac{103}{108}$; tum vero reliquae litterae hos nanciscentur valores:

$a = \frac{171}{54};\ b = \frac{359}{108};\ c = \frac{257}{54},$

multiplicando erit in numeris integris:

$a = 542;\ b = 359;\ c = 514:\ d = 103.$

§. 18. Sit denique $x = -\frac{5}{22}$ eritque $d = \frac{1795}{22^2}$ tum vero

$a = \frac{2570}{22^2};\ b = \frac{515}{22^2};\ c = \frac{2710}{22^2},$

sive per 5 dividendo et per 22^2 multiplicando fiet in numeris integris:

$a = 514;\ b = 103;\ c = 542;\ d = 359.$

§. 19. Praeterea vero formula nostra pro dd inventa etiam hac insigni gaudet proprietate quod si extremi tantum termini tollantur, pars reliqua exhibeat aequationem quadraticam resolubilem. Posito enim loco dd hoc quadrato $(\frac{5}{2} + 3xx)^2$ hoc sublato remanebit ista aequatio: $102xx - 221x - 85 = 0$, quae per 17 divisa fit $6xx - 13x - 5 = 0$, unde fit $x = \frac{5}{2}$ et $x = -\frac{1}{3}$ qui sunt iidem valores, quos supra operatio prima et secunda praebuerat.

Alia Analysis ad eandem solutionem ducens.

§. 20. Ut fiat $a^4 - b^4 = c^4 - d^4$ ponatur

$$a = m(f+g);\ b = m(f-g);\ c = n(h+k);\ d = n(h-k).$$

Tum enim erit $m^4 fg(ff+gg) = n^4 hk(hh+kk)$, et nunc statim ponatur $ff+gg = hh+kk$, ut fiat $m^4 fg = n^4 hk$ sive $\frac{n^4}{m^4} = \frac{fg}{hk}$, ita ut haec fractio $\frac{fg}{hk}$ reddi debeat biquadratum.

§. 21. Statuamus nunc

$$ff+gg = hh+kk = (\alpha\alpha+\beta\beta)(\gamma\gamma+\delta\delta),$$

unde litterae ita determinari poterunt

$$f = \alpha\gamma+\beta\delta;\ g = \alpha\delta-\beta\gamma;\ h = \alpha\delta+\beta\gamma;\ k = \alpha\gamma-\beta\delta;$$

quamobrem esse debebit $\frac{n^4}{m^4} = \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)}{(\alpha\delta+\beta\gamma)(\alpha\gamma-\beta\delta)}$. Ut haec formula ad pauciores litteras reducatur, ponamus $\alpha = \beta x$ et $\gamma = \delta y$, fietque $\frac{n^4}{m^4} = \frac{(xy+1)(x-y)}{(xy-1)(x+y)}$.

§. 22. Ista quidem formula solutu est difficillima, si modo ad quadratum reduci deberet unde vix ulla spes affulget, quemadmodum ea adeo ad biquadratum reduci liceat. Interim tamen forte fortuna incidi in modum omnes difficultates superandi, qui in hoc consistit, ut ponam $y = \frac{x}{xx-2}$ tum enim erit:

$$xy+1 = \frac{2(xx-1)}{xx-2};\ x-y = \frac{x(xx-3)}{xx-2};\ xy-1 = \frac{2}{xx-2};$$

$$x+y = \frac{x(xx-1)}{xx-2},$$

quocirca nostra aequatio erit $\frac{n^4}{m^4} = xx-3$, quae jam facillime ad quadratum perducitur, ponendo $x = \frac{pp+3qq}{2pq}$ tum erit

$$xx-3 = (pp-3qq)^2,$$

quocirca extracta radice erit $\frac{nn}{mm} = \frac{pp-3qq}{2pq}$, quae ergo formula denuo quadratum reddi debet; quadratum ergo fieri debet

$$2pq(pp-3qq),$$

ubi statim casus simplicissimus in oculos incurrit sumendo $p = 2$ et $q = 1$ tum enim fiet $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$, ideoque $n = 1$ et $m = 2$.

§. 23. Nunc igitur erit $x = \frac{7}{4}$ ideoque $y = \frac{28}{17}$. Quare cum sit $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{4}$ et $\frac{\gamma}{\delta} = y = \frac{28}{17}$ statuere poterimus $\alpha = 7$; $\beta = 4$; $\gamma = 28$; $\delta = 17$ ex quibus valoribus porro colligimus

$$f = 264; \quad g = 7; \quad h = 231; \quad k = 128,$$

ex quibus ipsi numeri quaesiti ita definiuntur ut sit:

$$a = 542; \quad b = 514; \quad c = 359; \quad d = 103,$$

qui sunt ipsi numeri ante inventi.

§. 24. Postquam hac occasione numeros ex Commentariorum loco supra citato descriptos attentius considerassem, mox deprehendi, in iis errorem calculi esse commissum, quo emendato numeri quaestioni satisfacientes multo minores reperiuntur. Erit enim

$$A = 12231; \quad B = 10203; \quad C = 10381; \quad D = 2903;$$

qui post eos quos hic invenimus pro minimis videntur habendi. Majores autem numeri ibi traditi recte se habere sunt deprehensi.

§. 25. Quanquam autem hoc modo resolutio hujus aequationis $A^4 + B^4 - C^4 - D^4 = 0$ feliciter successit, tamen inde nullum subsidium ad istam aequationem resolvendam: $A^4 + B^4 + C^4 - D^4 = 0$, ita ut nulla summa trium biquadratorum exhiberi posse videatur biquadrato aequalis. Quin etiam equidem hactenus sum occupatus in quatuor biquadratis inveniendis quorum summa esset pariter biquadratum, etiamsi iste casus secundum analogiam possibilis videatur. At vero quinque biquadrata pluribus modis dari posse observavi quorum summa est biquadratum.

VI.

DE

RESOLUTIONE HUJUS AEQUATIONIS

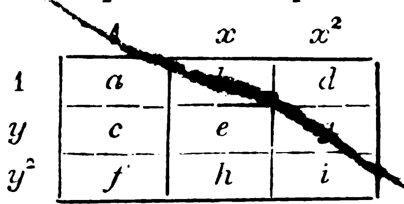
$$0 = a + bx + cy + dxx + exy + fyy + gxxy + hxyy + ixxyy$$

PER NUMEROS RATIONALES.

Conventui exhibita die 9. Oct. 1780.

§. 1.

Haec formula nihilo aequanda complectitur in genere omnes functiones rationales integras duarum variabilium x et y, quarum utraque non ultra secundam dimensionem assurgit. Ista igitur expressio comprehendere potest novem terminos omnino, quos commode sequenti Schemate quadratico repraesentari licet:



	1	x	x^2
1	a	b	d
y	c	e	g
y^2	f	h	i

Circa hanc igitur expressionem istam quaestionem evolvendam suscipio, quomodo pro binis variabilibus x et y valores rationales investigari oporteat, quae aequationi satisfaciant.

§. 2. Ante omnia autem hic dispiciendum est, utrum forma proposita resolutionem in duos factores rationales admittat nec ne, quando quidem priori casu quaestio nulla plane laborat difficultate. Duplici autem modo evenire potest, ut tales expressiones duos factores involvant. Primo enim ea potest esse productum ex talibus duobus factoribus:

$$(\alpha + \beta x + \gamma xx)(\delta + \varepsilon y + \zeta yy) = 0.$$

Horum enim factorum dummodo alteruter radices rationales contineat alteram variabilem prorsus pro lubitu accipere licebit. Sin autem neuter horum factorum nihilo aequatus radices radionales complectatur, tum etiam aequationi propositae nullo modo satisfieri poterit.

§. 3. Alter modus, quo factores locum habere possunt ita se habet:

$$(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)(\varepsilon + \zeta x + \eta y + \theta xy) = 0.$$

Resolutio enim hic infinitis modis in genere succedit. Posito enim priore factore $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy = 0$ ex eo ultro sequitur $y = \frac{-\alpha - \beta x}{\gamma + \delta x}$, ita ut, quomodocunque alterutra variabilium accipiatur, alterius valor facillime assignari possit, idque adeo duplici modo, ob geminos factores, quorum uterque nihilo aequari potest.

§. 4. His autem casibus remotis resolutio quaestionis propositae non parum est ardua, siquidem methodus desideratur omnes plane valores investigandi, qui pro x et y substituti aequationi satisfaciant. Utralibet enim variabilis pro cognita accipiatur, alterius determinatio deducit ad resolutionem aequationis quadraticae, ideoque oritur formula radicalis ad rationalitatem perducenda, quam duplicem resolutionem accuratius perpendamus.

§. 5. Consideremus igitur primo variabilem x tanquam cognitam, ac posito brevitatis gratia:

$$a + bx + dxx = P;$$
$$c + cx + gxx = Q;$$
$$f + hx + ixx = R,$$

aequatio hanc induet formam $P + Qy + Ryy = 0$, unde radice extracta oritur:

$$y = \frac{-Q \pm \sqrt{QQ - 4PR}}{2R},$$

ubi ergo omnes valores ipsius x desiderantur quibus ista formula radicalis : $\sqrt{QQ - 4PR}$ rationalis reddatur. Ista autem forma irrationalis, si loco P, Q, R valores assumti restituantur, evadet:

$$\sqrt{(c + ex + gxx)^2 - 4(a + bx + dxx)(f + hx + ixx)}.$$

Facta autem evolutione prodit sequens expressio non parum complexa:

$$\sqrt{(cc - 4af) + (2ce - 4ah - 4bf)x + (2cg + ee - 4df - 4bh - 4ai)x^2 + (2cg - 4dh - 4bi)x^3 + (gg - 4di)x^4},$$

quam ergo ad quadratum reduci oportet.

§. 6. Quoniam haec formula est biquadratica constat ejus resolutionem ne suscipi quidem posse nisi saltem unus casus innotescat quo ea evadat quadratum (ac saepenumero etiam unicus talis casus non sufficit). Cognito autem uno casu, veluti $x = n$ secundum praecepta Analyseos solita statui debet $x = n + z$, ut obtineatur nova formula unde valorem ipsius z deducere liceat, qui sit n', tum simili modo ulterius statui solet $z = n' + z'$ ut hoc modo valor z' innotescat, eodemque modo continuo ulterius progredi licet.

§. 7. Evidens autem est hanc solvendi methodum maxime esse molestam, ac plerumque vix ultra tertiam operationem ob numeros nimis magnos continuari posse; quamobrem hic methodum plane novam sum traditurus, cujus ope sine repetitis substitutionibus facillime ex valore jam cognito continuo novi valores deduci queant, quae ergo methodus in Analysin Diophantaeam insigne incrementum allatura est censenda.

§. 8. Ante omnia igitur hic assumo, cognitum esse valorem $x = m$, cui respondeat $y = n$, et quia inter x et y nacti sumus istam aequationem quadraticam $P + Qy + Ryy = 0$, ubi est, uti assumsimus: $P = a + bx + dxx$; $Q = c + ex + gxx$ et $R = f + hx + ixx$,

huic aequationi per hypothesin satisfiet, sumendo $x=m$ et $y=n$; at vero eidem valori $x=m$ gemini valores pro y convenient, scilicet praeter $y=n$ adhuc alius, qui sit $y=n'$, qui facillime innotescet, cum ex natura aequationum sit $n+n'=-\frac{Q}{R}$, ideoque $n'=-\frac{Q}{R}-n$. Vel etiam, cum sit $nn'=\frac{P}{R}$ habebitur quoque $n'=\frac{P}{nR}$; hocque ergo modo ex datis valoribus $x=m$ et $y=n$ novus valor ipsius y, scilicet n' obtinebitur.

§. 9. Simili modo etiam tractari potest forma aequationis, unde ex dato y definitur x, quae aequatio, ponendo brevitatis gratia $a+cy+fyy=S$; $b+ey+hyy=T$; $d+gy+iyy=U$, habebitur haec aequatio $S+Tx+Uxx=0$; unde patet, cuilibet valori ipsius y duos respondere valores ipsius x quorum summa semper erit $=-\frac{T}{U}$, productum autem $=\frac{S}{U}$. Quare cum constet valor $y=n$, eique respondeat $x=m$, si alter valor ipsius x sit m' erit $m+m'=-\frac{T}{U}$ ideoque $m'=-\frac{T}{U}-m$, tum vero etiam $mm'=\frac{S}{U}$, ideoque $m'=\frac{S}{mU}$, unde jam patet, harum formularum ope ex binis valoribus m et n continuo novos alios derivari posse, ita ut non opus sit ulla substitutione uti, qua forma proposita in alias formas transmutetur.

§. 10. Hinc igitur tradi possunt praecepta pro omnibus hujus generis quaestionibus resolvendis, quae in sequente problemate exponamus:

Problema.

Proposita aequatione inter binas variabiles x *et* y *in forma generali nostra contenta, si innotescant idonei valores pro* x *et* y, *ex iis alios novos elicere.*

Solutio.

§. 11. Talis aequatio ob binas variabiles x et y duplici modo repraesentetur:

$$\text{I. } P + Qy + Ryy = 0, \quad \text{II. } S + Tx + Uxx = 0,$$

ubi ergo in priore litterae P, Q, R erunt functiones ipsius x, in posteriore vero litterae S, T, U, functiones ipsius y. Jam denotent x et y ipsos valores jam cognitos, et quia cuilibet x respondent duae y, quarum si altera designetur per y', erit $y + y' = -\frac{Q}{R}$ vel etiam $yy' = \frac{P}{R}$.. Simili modo cum cuilibet y respondeant duae x, quarum altera si sit x' erit $x + x' = -\frac{T}{U}$ vel $xx' = \frac{S}{U}$.

§. 12. Cum nunc valores x et y habeantur cogniti, ex formula posteriore reperitur $x' = -\frac{T}{U} - x$ vel etiam $x' = \frac{S}{Ux}$, hic novus valor pro x inventus combinetur cum valore cognito y, indeque ex priore formula reperietur novus valor pro y, qui erit $y' = -\frac{Q}{R} - y$, vel etiam $y' = \frac{P}{Ry}$. Hic jam valor cum immediate praecedente x conjunctus praebebit ex forma posteriore novum valorem pro x, qui erit $x' = -\frac{T}{U} - x$, vel etiam $x' = \frac{S}{Ux}$ hocque modo progrediendo series infinita orietur, alternatim valores idoneos pro x et y exhibens, quorum bini contigui aequationi propositae satisfacient.

§. 13. Quod si ambae variabiles x et y permutentur, alia similis series erui poterit, scilicet incipiendo ab y et x, ex priori formula novus valor pro y reperitur qui erit $y' = -\frac{Q}{R} - y$ vel $y' = \frac{P}{Ry}$. Ex hoc valore cum cognito x conjuncto colligitur novus valor $x' = -\frac{T}{U} - x$ vel $x' = \frac{S}{Ux}$, qui denuo conjunctus cum proximo praecedente y dabit $y' = \frac{Q}{R} - y$ vel $y' = \frac{P}{Ry}$, hocque modo etiam sine fine progredi licebit. Interdum tamen alterutra

harum serierum abrumpi potest, quando pervenitur vel ad $x = \infty$ vel ad $y = \infty$, tum enim ulterius progredi non licet.

§. 14. Talibus autem valoribus pro x et y inventis cum ex resolutione prioris formulae fiat $y = -\frac{Q \pm \sqrt{QQ - 4PR}}{2R}$ omnes valores pro x inventi reddent formulam $QQ - 4PR$ quadratum. Simili modo cum ex altera aequatione sit $x = -\frac{T \pm \sqrt{TT - 4SU}}{2U}$ omnes valores pro y inventi reddent formulam $TT - 4SU$ quadratum. Quo autem usus horum praeceptorum clarius appareat, aliquot exempla subjungamus.

Exemplum 1.

§. 15. Proposita sit haec aequatio:

$$xxyy - xy + 4 = xx + yy,$$

ubi statim patet sumto $x = 0$ fore $y = \pm 2$, similique modo si $y = 0$ fiet $x = \pm 2$. Praeterea etiam notetur casus quo $x = 1$; tum enim fiet $y = 3$, eodemque modo si $y = 1$ fit $x = 3$, qui ergo sunt casus cogniti, ex quibus innumeros alios derivare licebit.

§. 16. Hunc in finem repraesentatur aequatio proposita duplici modo:

$$\text{I.} \quad 4 - xx - xy + yy(xx - 1) = 0$$

$$\text{II.} \quad 4 - yy - yx + xx(yy - 1) = 0.$$

Ex harum prima oritur $y + y' = \frac{x}{xx - 1}$, vel etiam $yy' = \frac{4 - xx}{xx - 1}$. Eodem modo ex altera oritur $x + x' = \frac{y}{yy - 1}$ vel etiam $xx' = \frac{4 - yy}{yy - 1}$.

§. 17. Incipiamus nunc a valoribus $x = 0$ et $y = 2$, unde ex formula posteriore fit $x' = \frac{2}{3}$ ex hoc porro cum praecedente $y = 2$ prior formula dat $y' = -\frac{16}{5}$. Hic porro valor cum praecedente $x = \frac{2}{3}$ conjunctus dat $x' = -\frac{78}{77}$ ex quo porro fit $y' = -\frac{1102}{31}$.

Hos igitur valores ordine disponamus:

$x = 0$; $y = 2$; $x = \frac{2}{3}$; $y = -\frac{16}{5}$; $x = -\frac{78}{77}$; $y = -\frac{1102}{31}$; etc.

§. 18. Si incipiamus a valoribus $x = 0$ et $y = -2$ iidem prodibunt valores signis tantum mutatis, quod etiam eveniet permutandis variabilibus, sumendo $y = 0$ et $x = \pm 2$; tum enim prodibunt pro x valores quos antea pro y invenimus et vicissim. Invertendo porro, si incipiamus ab $y = 2$ et $x = 0$, sequens valor pro y erit -2, unde manifesto prodit series secundo loco commemorata.

§. 19. Verum valor qui praeterea nobis est cognitus novos producit valores; incipiendo enim ab $x = 1$ et $y = 3$ erit $x' = -\frac{5}{8}$; $y' = -\frac{77}{39}$; $x'' = -\frac{31}{19 \cdot 29}$. Quod si ordine inverso incipere vellemus, ponendo $y = 3$ et $x = 1$ fit statim $y = \infty$, sicque jam tota progressio sistitur. Valores autem hic inventi ordine dispositi erunt $x = 1$; $y = 3$; $x = -\frac{5}{8}$; $y = -\frac{77}{39}$; $x = -\frac{31}{19 \cdot 29}$ ubi notandum eosdem valores etiam signis mutatis, atque adeo valoribus x et y inter se permutatis quaesito pariter satisfacere, sicque pro solutione problematis duas series in infinitum procedentes sumus adepti.

§. 20. Cum in hoc exemplo habeamus $P = 4 - xx$; $Q = -x$; $R = xx - 1$; tum vero $S = 4 - yy$; $T = -y$; $U = yy - 1$; erit $QQ - 4PR = 16 - 19xx + 4x^4$. Similique modo

$$TT - 4SU = 16 - 19yy + 4y^4,$$

quae cum sint similes inter se, ista formula: $16 - 19zz + 4z^4$ semper evadet quadratum si loco z sumamus tam valores pro x quam pro y inventos, qui ergo valores ordine dispositi sunt:

$$0,\ 2,\ \frac{2}{3},\ \frac{16}{5},\ \frac{78}{77},\ \frac{1102}{32},$$

$$1,\ 3;\ \frac{5}{8},\ \frac{77}{39},\ \frac{31}{19 \cdot 29}.$$

Veluti si sumamus $z = \frac{5}{8}$ erit $16 - 19zz + 4z^4 = \frac{97^2}{32^2}$.

§. 21. Haec insignis proprietas isti innititur fundamento, quod in aequatione proposita binae variabiles x et y inter se commutari possunt; quoties ergo aequatio proposita ita fuerit comparata semper eadem proprietas locum habebit, ut valores pro litteris x et y inventi permutationem admittant ita ut, cum series horum valorum fuerit inventa quilibet bini termini ejus contigui pro litteris x et y sine discrimine accipi queant. Operae igitur pretium erit omnes istos casus in genere evolvere.

Exemplum 2.

§. 22. Proposita inter binas variabiles x et y hac aequatione:

$$\alpha + \beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + \delta xy + \varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy = 0$$

ubi x et y permutationem admittunt, investigare omnes valores ipsarum x et y huic aequationi satisfacientes.

§. 23. Reducatur aequatio proposita ad hanc formam:

$$\alpha + \beta x + \gamma xx + y(\beta + \delta x + \varepsilon xx) + yy(\gamma + \varepsilon x + \zeta xx) = 0,$$

unde fit pro forma nostra generali:

$$P = \alpha + \beta x + \gamma xx,$$
$$Q = \beta + \delta x + \varepsilon xx,$$
$$R = \gamma + \varepsilon x + \zeta xx,$$

qui iidem valores, permutatis x et y, valebunt pro litteris S, T, U; unde pro binis valoribus ejusdem litterae habebimus $y + y' = -\frac{Q}{R}$ vel etiam $yy' = \frac{P}{R}$.

§. 24. Sint nunc A et B bini valores cogniti pro litteris x et y, ex iis sequentes qui sint C, D, E, etc. per sequentes formulas definientur: $C = -\frac{\beta - \delta B - \varepsilon B^2}{\gamma + \varepsilon B + \zeta B^2} - A$ sive $C = \frac{\alpha + \beta B + \gamma B^2}{A(\gamma + \varepsilon B + \zeta B^2)}$; tum vero $D = -\frac{\beta - \delta C - \varepsilon C^2}{\gamma + \varepsilon C + \zeta C^2} - B$ sive $D = \frac{\alpha + \beta C + \gamma C^2}{B(\gamma + \varepsilon C + \zeta C^2)}$

$$E = -\frac{\beta - \delta D - \varepsilon D^2}{\gamma + \varepsilon D + \zeta D^2} - C \quad \text{sive} \quad E = \frac{\alpha + \beta D + \gamma D^2}{B(\gamma + \varepsilon D + \zeta D^2)}.$$

etc. etc.

Inventa igitur hac serie, quilibet bini termini contigui pro x et y assumi poterunt. Ita si sumamus $x = D$ erit vel $y = C$ vel $y = E$; utroque enim modo aequationi nostrae satisfiet.

§. 25. Iidem porro etiam termini hujus seriei semper formulam $QQ - 4PR$ reddent quadratum quae cum aeque valeat pro x et y, earum loco scribamus novam litteram z et cum sit

$$P = \alpha + \beta z + \gamma zz; \quad Q = \beta + \delta z + \varepsilon zz; \quad R = \gamma + \varepsilon z + \zeta zz$$

facta evolutione pro formula $QQ - 4PR$ talis expressio reperietur: $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \mathfrak{E}z^4$, ubi erit:

$$\mathfrak{A} = \beta\beta - 4\alpha\gamma,$$
$$\mathfrak{B} = 2\beta\delta - 4\alpha\varepsilon - 4\beta\gamma,$$
$$\mathfrak{C} = \delta\delta - 2\beta\varepsilon - 4\alpha\zeta - 4\gamma\gamma,$$
$$\mathfrak{D} = 2\delta\varepsilon - 4\beta\zeta - 4\gamma\varepsilon,$$
$$\mathfrak{E} = \varepsilon\varepsilon - 4\beta\zeta.$$

§. 26. Igitur formula ad quartam dimensionem ipsius z exsurgere potest, cujusmodi formulae in Analysi Diophantaea difficillime non nisi per longos calculos ad quadratum reduci possunt. At vero series terminorum A, B, C, D, etc. ita est comparata, ut ejus quilibet terminus pro z assumtus hanc formulam reddat quadratum.

Exemplum 3.

§. 27. Proposita sit ista aequatio:

$$xxy - xyy + xx + yy - 2 = 0,$$

cui primo satisfaciunt valores $x = 1$ et $y = 1$; tum vero etiam $x = -1$ et $y = -1$. Hacc aequatio ad nostram formam $P + Qx + Rxx$ reducta dat $P = xx - 2$; $Q = xx$; $R = 1 - x$. Altera vero forma $S + Ty + Uyy$ erit $S = yy - 2$; $T = -yy$; $U = 1 + y$ unde deducimus has formulas: $y + y' = \frac{xx}{x-1}$ vel etiam $yy' = \frac{xx-2}{1-x}$; tum vero $x + x' = + \frac{yy}{y+1}$ vel etiam $xx' = \frac{yy-2}{1+y}$.

§. 28. Ope harum formularum si incipiamus ab his valoribus $x = 1$ et $y = 1$ sequentas investigentur:

$$x' = -\tfrac{1}{2};\ y' = -\tfrac{7}{6}\ x'' = -\tfrac{23}{3};\ y'' = -\tfrac{73}{13};\ x''' = +\tfrac{217}{13 \cdot 20}.$$

Pro altero casu cognito incipiamns ab $y = -1$ et $x = -1$ et valores sequentes ordine erunt:

$$y' = \tfrac{1}{2};\ x' = \tfrac{7}{6};\ y'' = \tfrac{23}{3};\ x'' = \tfrac{73}{13};\ y''' = -\tfrac{217}{13 \cdot 20}.$$

Hi valores posteriores conveniunt praecedentibus mutatis tam signis quam binis litteris x et y cujus ratio est evidens ex ipsa aequatione proposita.

§. 29. Cum hic sit:

$$QQ - 4PR = x^4 + 4x^3 - 4xx - 8x + 8,$$

ista formula evadet quadratum, quoties pro x quispiam valorum inventorum substituatur qui sunt ordine:

$$1,\ -1,\ -\tfrac{1}{2},\ +\tfrac{7}{6},\ -\tfrac{23}{3},\ +\tfrac{73}{13},\ +\tfrac{217}{13 \cdot 20};\ \text{etc.}$$

Veluti si sumamus $x = \frac{7}{6}$ erit

$$QQ - 4PR = \tfrac{43^2}{36^2}.$$

Exemplum 4.

§. 30. Proposita sit haec aequatio:

$$xxyy - x - y + 1 = 0,$$

cui sumto $x = 0$ satisfacit $y = 1$; at sumta $y = 0$ satisfacit $x = 1$ Jam quia formulae nostrae erunt $y + y = \frac{1}{xx}$ et $y'y = \frac{1-x}{xx}$, tum vero $x + x' = \frac{1}{yy}$ et $xx' = \frac{1-y}{yy}$. Hinc incipiendo a valoribus $x = 0$ et $y = 1$ sequentes erunt $x' = 1$; $y' = 0$; $x'' = \infty$. Tum alter casus $y = 0$ et $x = 1$ dat ut ante $y' = 1$; $x' = 0$; $y'' = \infty$, unde patet hinc alios valores non obtineri, praeter

$$x = 0 \; ; \quad y = 0 \; ; \quad x = 1$$
$$y = 1 \; ; \quad x = 1 \; ; \quad y = 1$$

neque tamen hinc concludere licet nullos alios valores satisfacere. Si enim alius insuper valor cognitus daretur, ex eo fortasse alios novos eruere liceret. At revera alii valores prorsus non dantur Constat autem plurimas dari formulas, quae paucis tantum quibusdam casibus quadrata reddi possunt.

VII.

METHODUS NOVA ET FACILIS

FORMULAS CUBICAS ET BIQUADRATICAS AD QUADRATUM REDUCENDI.

Conventui exhibita die 16. Oct. 1780.

§. 1.

Quando in Analysi Diophantea pervenitur ad formulas cubicas vel adeo biquadraticas quadrato aequandas, ante omnia necesse est, ut unus saltem casus innotescat, quo hoc eveniat; tum vero praecepta constant, ex tali casu cognito alium eruendi, quo invento formulam propositam ope certae substitutionis in aliam tranformari oportet, unde simili modo novus valor investigari solet. Hoc modo per continuo repetitas substitutiones et transformationes totum negotium absolvi debet, quae autem mox ob numeros continuo majores occurrentes tam fiunt molestae ac taediosae, ut vix quisquam reperiatur, qui has operationes aliquoties reiterare voluerit. Quamobrem non dubito, quin methodus, quam hic sum traditurus insigne incrementum Analysi sit allatura cujus beneficio sine ulla substitutione vel transformatione ex casu quovis cognito alios derivare licet, cujus quidem methodi jam aliquot specimina in medium attuli, hic autem eam dilucide explicare, ejusque usum ostendere accuratius constitui.

§. 2. Sit igitur formula ad quadratum reducenda:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = V,$$

ac totum negotium huc redit, ut ista formula ad hanc speciem revocetur $V = P^2 + QR$, ubi literae P, Q, R tales designent formas:

$$P = a + bx + cxx$$
$$Q = d + ex + fxx$$
$$R = g + hx + ixx$$

tum enim cum V debeat esse quadratum, statuatur ejus radix $= P + Qy$, unde orietur ista aequatio: $2Py + Qyy = R$, quam in posterum canonicam vocemus, in qua ergo duae variabiles x et y reperientur quarum utraque non ultra secundam dimensionem exsurgit, ita ut cuilibet valori ipsius x gemini valores ipsius y respondeant, ac vicissim cuilibet valori ipsius y duo valores ipsius x. Haec ergo aequatio, substitutis valoribus ita erit comparata:

$$yy(d + ex + fxx) + 2y(a + bx + cxx) - g - hx - ixx = 0,$$

unde pro variabili x formabitur ista aequatio:

$$xx(fyy + 2cy - i) + x(eyy + 2by - h) + dyy + 2ay - g = 0,$$

ubi brevitatis gratia ponamus:

$$fyy + 2cy - i = S$$
$$eyy + 2by - h = T$$
$$dyy + 2ay - g = U$$

ita ut habeamus hanc aequationem: $Sxx + Tx + U = 0$, quam ergo cum altera aequatione: $Qyy + 2Py - R = 0$ convenire necesse est.

§. 41. Cum igitur cuilibet valori ipsius x respondeant duo valores ipsius y, quorum alter sit y, alter vero y', ex natura aequationum habebitur:

$$y + y' = -\frac{2P}{Q} \text{ et } yy' = -\frac{R}{Q}.$$

Simili modo cum singulis valoribus ipsius y respondeant duo valores ipsius x, qui sint x et x', erit $x + x' = -\frac{T}{S}$ et $xx' = \frac{U}{S}$, quarum formularum ope ex cognitis quibusvis valoribus ipsarum x et y, alii novi assignari poterunt, ex quibus deinde pariter alii novi hocque modo sine fine plures erui poterunt, in qua insigni proprietate consistit natura novae methodi quam hic sum traditurus,

quae ergo sine ullis substitutionibus et transformationibus continuo plures novos valores idoneos suppeditat.

§. 5. Quod quo clarius appareat ponamus primos valores ipsarum x et y cognitos esse $x = \alpha$ et $y = \beta$ et quia valori $y = \beta$ respondent duo valores ipsius x, quorum alter est α, alter vero, qui sit γ reperietur ex hac formula:

$$\gamma = -\frac{(e\beta\beta + 2b\beta - b)}{f\beta\beta + 2c\beta - i} - \alpha,$$

eodem modo, quia ipsi γ respondent duo valores ipsius y, quorum alter habetur β, si alter statuatur $= \delta$ erit

$$\delta = -\frac{2(a + b\gamma + c\gamma\gamma)}{d + e\gamma + f\gamma\gamma} - \beta.$$

Nunc quia ipsi δ respondet primo $x = \gamma$, si alter ponatur $= \varepsilon$ reperietur:

$$\varepsilon = -\frac{(e\delta\delta + 2b\delta - b)}{f\delta\delta + 2c\delta - i} - \gamma,$$

hocque modo ulterius progrediendo habebimus:

$$\zeta = -\frac{2(a + b\varepsilon + c\varepsilon\varepsilon)}{d + e\varepsilon + f\varepsilon\varepsilon} - \delta; \quad \eta = -\frac{(e\zeta\zeta + 2b\zeta - b)}{f\zeta\zeta + 2c\zeta - i} - \varepsilon;$$

etc. etc.

Unde patet hanc seriem secundum legem satis simplicem quousque libuerit continuari posse. Inventis autem terminis hujus seriei: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, etc. alterni $\alpha, \gamma, \varepsilon, \eta$, etc. praebebunt valores ideoneos pro litera x, quibus formula proposita revera fit quadratum.

§. 6. Possunt etiam bini valores cogniti $x = \alpha$ et $y = \beta$ in ordine permutari, ita ut incipiamus ab $y = \beta$ et $x = \alpha$; atque ope earundem formularum similis series retrograda formari poterit, cujus tertius terminus erit novus valor ipsius y, quartus ipsius x, quintus ipsius y et ita porro, ita ut istius seriei termini secundus, quartus, sextus, etc. etiam valores idoneos pro littera x sint exhibituri. Interdum quidem usu venit ut alterutra harum serierum alicubi abrumpatur, quod contingit quando ad terminum infinite magnum pervenitur. Quin etiam ejusmodi casus occurrere possunt, quibus valo-

res ipsius x iterum ad praecedentes revolvuntur, id quod necessario evenire debet pro ejusmodi formulis, quae vel unico tantum casu vel tantum duobus tribusve quadrata evadere possunt; veluti evenit pro hac formula $1 + x^3 = \square$ quae tantum tribus casibus quadratum fieri potest.

§. 7. Cum autem hac operationes institui nequeunt nisi pro litteris x et y valores idonei, quos posuimus $x = \alpha$ et $y = \beta$, fuerint cogniti, tales valores plerumque suppeditat ipsa aequatio canonica

$$yy\,Q + 2y\,P - R = 0.$$

Si enim fieri queat $Q = 0$, sive $d + ex + fxx = 0$, quod evenit quando fuerit $ee - 4df = \square$, tum erit $y = \frac{R}{2P}$. Deinde si fuerit $R = 0$, hoc est $g + hx + ixx = 0$, quod fit quando fuerit $hh - 4gi = \square$ tum bini prodeunt valores pro y, alter $y = 0$, alter $y = -\frac{2P}{Q}$. Hoc igitur modo evenire potest, ut pro x quatuor valores idonei reperiantur, simulque iis valores ipsius y respondentes innotescant. Praeterea vero etiam altera forma aequationis canonicae, quae erat $Sxx + Tx + U = 0$ valores idoneos praebere potest; si enim reddi queat $S = fyy + 2cy - i = 0$, unde pro y duo valores resultare possunt, id contingit, quando fuerit $cc + fi = \square$; tum autem erit $x = -\frac{U}{T}$. Denique etiam quando fuerit $U = dyy + 2ay - g = 0$, quod evenit si $aa + dg = \square$ pro x gemini prodeunt valores, alter $x = 0$, alter $x = -\frac{T}{S}$, unde ergo etiam plures casus cogniti erui possunt. Omnes autem istos valores cognitos, qui immediate ex aequatione canonica derivantur vocemus *primitivos*, quandoquidem ex his per praecepta ante tradita innumerabiles alii deduci possunt. Ad hoc autem imprimis requiritur, ut formula proposita V quadrato aequanda ad hanc formam: $V = PP + QR$ redigi queat. Hoc igitur aliquot exemplis illustremus.

Exemplum 1.

§. 8. Sit formula quadrato aequanda:

$V = 4xx + (x - 1)(3xx - x - 1)$, sive

$V = 3x^3 + 1$ erit $P = 2x$; $Q = x - 1$; $R = 3xx - x - 1$ unde aequationis canonicae prior forma erit:

$$(x - 1)yy + 4xy - (3xx - x - 1);$$

altera vero forma:

$$-3xx + (yy + 4y + 1)x - (yy - 1) = 0,$$

unde binae formulae, quas vocemus *directrices* erunt:

$$y + y' = -\frac{4x}{x-1}; \quad x + x' = \frac{yy+4y+1}{3}.$$

At vero ex formula priore canonica oritur valor cognitus $x = 1$, cui respondet $y = \frac{1}{4}$; altera autem forma, facto $yy - 1 = 0$ praebet vel $y = +1$ vel $y = -1$, quorum priori respondet vel $x = 0$ vel $x = 2$; alteri vero $y = -1$ respondet etiam vel $x = 0$ vel $x = -\frac{2}{3}$.

§. 9. Instituamus igitur operationes supra praescriptas et incipiamus primo a valoribus $x = 1$ et $y = \frac{1}{4}$ ac reperiemus sequentem seriem:

$$x = 1;\ y = \tfrac{1}{4};\ x = -\tfrac{5}{16};\ y = -\tfrac{101}{84};$$

Sumamus nunc $x = 0$ et $y = +1$, unde formulae directrices producent sequentem seriem valorum idoneorum:

$$x = 0;\ y = 1;\ x = 2;\ y = -9;\ x = \tfrac{40}{3};\ y = +\tfrac{173}{37};\ \text{etc.}$$

Invertamus ordinem incipiendo ab $y = 1$ et $x = 0$ series valorum idoneorum erit:

$$y = 1;\ x = 0;\ y = -1;\ x = -\tfrac{2}{3};\ x = \tfrac{8}{25};\ \text{etc.}$$

In his jam seriebus omnes reliqui valores primitivi continentur. In praecedente autem serie ordinem valorum primitivorum $x = 1$ et $y = \frac{1}{4}$ ideo non invertimus, quia sequens y jam prodiisset infinitum.

§. 10. Formula ergo proposita $V = 3x^3 + 1$ ad quadratum reducitur his valoribus ipsius x:

$x = 0$; $x = 1$; $x = -\frac{2}{3}$; $x = 2$; $x = -\frac{5}{16}$; $x = \frac{8}{25}$; $x = \frac{40}{3}$; etc.
qui quomodo satisfaciant videamus.

Si $x = 0$ fit $V = 1^2$
.. $x = 1$ .. $V = 2^2$
.. $x = -\frac{2}{3}$ .. $V = \frac{1}{3^2}$
.. $x = 2$ .. $V = 5^2$
.. $x = -\frac{5}{16}$ .. $V = \frac{6^2}{64^2}$
.. $x = \frac{8}{25}$ .. $V = \frac{131^2}{125^2}$
.. $x = \frac{40}{3}$ .. $V = \frac{253^2}{3^2}$
etc.

Exemplum 2.

§. 11. Proposita sit haec formula quadrato aequanda:
$V = xx + (xx + 1)(xx - 2)$, sive
$V = x^4 - 2$, ubi est $P = x$; $Q = xx + 1$; $R = xx - 2$.
Hinc aequatio canonica erit:

$$(xx + 1)yy + 2xy - (xx - 2) = 0;$$

altera autem ejus forma erit:

$$(yy - 1)xx + 2xy + (yy + 2) = 0$$

unde formantur hac formulae directrices:

$$y' = -\frac{2x}{xx + 1} - y \quad \text{et} \quad x' = -\frac{2y}{yy - 1} - x.$$

Prior autem forma cum neque fieri queat $Q = 0$ neque $R = 0$ nullos dat valores primitivos; altera autem forma dat $S = 0$ ideoque $y = \pm 1$, cui respondet $x = \mp \frac{3}{2}$. Praeterea vero cum fieri nequeat $U = yy + 2 = 0$, alios valores primitivos non suppeditat.

§. 12. Incipiamus igitur a valoribus $y = 1$ et $x = -\frac{3}{2}$ et formulae directrices sequentem nobis administrant seriem valorum:

$$y = 1; \quad x = -\frac{3}{2}; \quad y = \frac{1}{13}; \quad x = -\frac{113}{84}.$$

Invertendo autem $x = -\frac{3}{2}$; $y = 1$; $x = \infty$. Alteri autem valores primitivi $x = +\frac{3}{2}$ et $y = -1$. eosdem manifesto producent valores signis tantum mutatis, qui ergo, quoniam in formula proposita tantum occurrit xx, novas solutiones non dabunt. Valores ergo ipsius x hactenus inventi sunt $x = \pm\frac{3}{2}$ et $x = \frac{113}{84}$, quibus formula proposita $x^4 - 2$ quadratum redditur hoc modo:

si $x = \frac{3}{2}$ erit $V = \frac{7^2}{4^2}$

.. $x = \frac{113}{84}$ .. $V = \frac{7967^2}{7056^2}$.

Exemplum 3.

§. 13. Proposita sit haec formula quadrato aequanda:

$$V = (x+1)^2 + x(x+1)(x-2) \text{ sive } V = x^3 + 1,$$

quam certum est aliis casibus quadratum fieri non posse praeter $x = 0$, $x = -1$ et $x = 2$, id quod etiam nostrae operationes declarabunt. Cum autem hic sit $P = x+1$; et $QR = x(x+1)(x-2)$, sumamus $Q = x(x+1)$ et $R = x-2$; aequatio ergo canonica erit $x(x+1)yy + 2(x+1)y - (x-2) = 0$, cujus altera forma erit $yyxx + (yy + 2y - 1)x + (2y + 2) = 0$. Formulae autem directrices ita se habebunt:

$$y' = -\frac{2}{x} - y \text{ et } x' = -\frac{(yy+2y-1)}{yy} - x.$$

Ex priori forma posito $Q = 0$ oriuntur duo valores primitivi vel $x = 0$ vel $x = -1$, pro quorum priore fit $y = -1$, pro altero $y = \infty$. Facto autem $R = 0$, sive $x = 2$ erit vel $y = 0$, vel $y = -1$. Altera autem forma, posito $S = 0$ dat $y = 0$; cui respondet $x = 2$; at posito $U = 0$ dat $y = -1$, cui respondet $x = 2$ quos ergo valores primitivos evolvamus.

§. 14. Sit igitur primo $x = 0$ et $y = 1$ et formulae nostrae directrices producent:

$$x = 0;\ y = -1;\ x = +2;\ y = 0;\ x = \infty.$$

Invertendo $y = -1$; $x = 0$; $y = \infty$. Sumamus nunc hos primitivos valores $x = -1$; $y = \infty$ qui dant

$$x = -1;\ y = \infty;\ x = 0;\ y = \infty;\ x = 0;\ \text{etc.}$$

Sumatur denique $x = 2$ et $y = 0$, et valores erunt:

$$x = 2;\ y = 0;\ x = \infty;\ y = 0;\ x = \infty;\ \text{etc.}$$

Patet ergo ex omnibus primitivis, qui erant $x = 0$; $x = -1$; $x = 2$, nullos alios novos deduci posse.

Exemplum 4.

§. 15. Proposita sit quadrato aequanda haec formula:

$$V = xx + (xx - 1)(2xx + 1),\ \text{sive}\ V = 2x^4 - 1,$$

ad quam pervenitur quando quaeruntur duo numeri, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum. Cum igitur hic sit $P = x$; $Q = xx - 1$; $R = 2xx + 1$ erit aequatio canonica ita expressa:

$$(xx - 1)yy + 2xy - (2xx + 1) = 0,$$

ejusque inversa

$$(yy - 2)xx + 2yx - (yy + 1) = 0.$$

Hinc formulae directrices erunt:

$$y' = -\frac{2x}{xx - 1} - y \ \text{et}\ x' = -\frac{2y}{yy - 2} - x.$$

Prior forma, posito $Q = 0$ dat $x = \pm 1$, cui respondet $y = \pm \frac{3}{2}$; at $R = 0$ nihil dat. Ex altera forma itidem nulli valores primitivi oriuntur.

§. 16. Evolvamus ergo valores $x = 1$ et $y = \frac{3}{2}$ ex quibus per formulas directrices reperiuntur:

$$x = 1;\ y = \tfrac{3}{2};\ x = -13;\ y = -\tfrac{113}{84};\ \text{etc.}$$

Permutando autem primos valores fient $y = \frac{3}{2}$; $x = 1$; $y = \infty$. Reliqui primitivi non nisi signo differunt ideoque eosdem praebent valores. At vero valor $x = 13$ dat $V = 239^2$.

§. 17. Hactenus autem assumsimus formulam propositam quadrato aequandam:

$$A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4 = V,$$

jam esse ad formam $PP + QR$ revocatam, atque insuper aequationem canonicam inde formatam $Qyy + 2Py - R = 0$, ejusque alteram formam $Sxx + Tx + U = 0$ ita esse comparatam, ut saltem una harum aequalitatum $Q = 0$; $R = 0$; $S = 0$; $U = 0$ praebeat radicem rationalem, quod si non eveniat, operationes supra desriptae ne institui quidem possunt, nisi forte divinando casus quispiam reperiri queat, quo formula proposita revera evadat quadratum. Quod si enim hoc modo innotuerit valor ipsius x, ei respondens y ex aequatione canonica derivare poterit; unde deinceps operationes praescriptae institui poterunt.

§. 18. Verum etiam reductio formulae propositae ad formam $PP + QR$ saepenumero maxime est difficilis, praecipue si nullus casus jam fuerit cognitus. Quoties autem unus saltem casus quo formula proposita quadratum evadit innotuerit, tum ea semper ad formam $PP + QR$ reduci, et quia casus jam est cognitus, operationes optimo successu institui poterunt. Quemadmodum igitur ex casu cognito formula proposita ad formam $PP + QR$ reduci queat imprimis nobis erit ostendendum, quo ista tractatio completa reddatur id quod in sequentibus Problematibus expediemus.

Problema I.

Si Proposita fuerit formula cubica haec:

$$A + Bx + Cxx + Dx^3 = V,$$

quae evadat quadratum casu $x = a$, *eam ad formam* $PP + QR$ *revocare, indeque aequationem canonicam constituere, ex qua deinceps operationes supra descriptas instituere liceat.*

Solutio.

§. 19. Fiat igitur, posito $x = a$ nostra formula:
$$A + Ba + Ca^2 + Da^3 = ff,$$
tum sumto $P = f$ semper pro QR ejusmodi formula prodibit quae in factores resolvi potest, quarum ergo alter pro Q alter pro R accipi poterit. Tum enim erit $QR = V - ff$, unde loco ff valorem substituendo, itemque loco V, prodibit:
$$QR = B(x - a) + C(x^2 - a^2) + D(x^3 - a^3), \text{ ideoque}$$
$$QR = (x - a)\big(B + C(x + a) + D(xx + ax + a)\big),$$
ubi jam sumi poterit $Q = x - a$ et
$$R = B + C(x + a) + D(xx + ax + aa).$$
Possent etiam hi valores inter se permutari; verum hinc nullum discrimen, in valoribus ipsius x, quos operationes nostrae suppeditabunt, orietur.

§. 20. Inventis jam valoribus litterarum P, Q, R, aequatio canonica erit:
$$yy(x - a) + 2fy - B - C(x + a) - D(xx + ax + aa) = 0$$
unde pro valore cognito:
$$x = a \quad \text{fit} \quad y = \frac{B + 2Ca + 3Daa}{2f},$$
et jam facile erit ex his valoribus ope formularum supra datarum innumerabiles alios valores litterarum x et y eruere, nisi forte ad valores infinitos perveniatur, vel iidem recurrant.

§. 21. Hic autem non absolute necesse est, ut sumatur $P = f$, sed pari successu ejus loco talis functio ipsius x assumi posset, quae posito $x = a$ abeat in f, tum enim prorsus ut ante $V - PP$ factorem habebit $x - a$. Interim tamen hinc nulli alii valores pro x prodibunt: tota enim res eo ridibit ac si pro y sumeremus $y + W$, denotante W functionem quandam ipsius x, unde pro calculi facilitate expediet statui $P = f$.

Problema II.

Si formula proposita cubica:

$$V = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

duobus casibus $x = a$ *et* $x = b$ *quadratum evadat, eam ad formam* $PP + QR$ *ita reducere, ut aequatio canonica utrumque valorem* $x = a$ *et* $x = b$ *involvat.*

Solutio.

§. 32. Ponamus igitur casu $x = a$ fieri

$$A + Ba + Ca^2 + Da^3 = ff$$

at vero altero casu $x = b$ fieri $A + Bb + Cb^2 + Db^3 = gg$, atque pro aequatione canonica statuamus

$$V = (p + q(x - a) + y(x - a)(x - b))^2 \text{ sive}$$

$$V = pp + 2pq(x - a) + 2py(x - a)(x - b) + qq(x - a)^2 + 2qy(x - a)^2(x - b) + yy(x - a)^2(x - b)^2.$$

ubi p et q denotent certas quantitates constantes ab x non pendentes, quas sequenti modo definire licebit.

§. 23. Ponamus primo $x = a$, et quia tum fit $V = ff$ habebimus hanc aequationem: $ff = pp$ ideoque $p = f$; deinde ponamus $x = b$, et quia tum fit $V = gg$ nostra aequatio hanc induet formam: $gg = ff + 2fq(b - a) + qq(b - a)^2$, unde fit $g = f + q(b - a)$ ideoque $q = \frac{g - f}{b - a}$, quibus valoribus substitutis. Inventis nunc binis valoribus p et q sumatur $P = p + q(x - a)$, atque manifestum est formulam $V - PP$ factorem habituram esse $(x - a)(x - b)$, unde statuamus $V - PP = M(x - a)(x - b)$, atque nunc fiat

$$V = (P + y(x - a)(x - b))^2,$$

factaque evolutione et translato PP ad alteram partem tota aequatio divisibilis erit per $(x - a)(x - b)$, orieturque

$$M = 2Py + yy(x - a)(x - b).$$

Quod autem facta evolutione aequatio prodeat per $(x - a)(x - b)$

divisibilis inde colligi potest, quod ambo casus $x = a$ et $x = b$ inter se permutari possunt; quare cum formula $V - PP$ sponte factorem habeat $x - a$, necesse est, ut etiam habeat factorem $x - b$. Quia enim invenimus $P = f + \frac{(g-f)(x-a)}{b-a}$ facta permutatione erit $P = g + \frac{(f-g)(x-b)}{a-b}$ hae duae formulae prorsus inter se congruunt. Quare cum formula $V - PP$ divisibilis fuerit per $x - a$, etiam divisibilis erit per $x - b$, ideoque etiam per productum $(x - a)(x - b)$.

Exemplum.

§. 24. Sit $V = 3x^3 + 1$, quae aequatio casu $x = 1$ fit $V = 2^2$, casu autem $x = 2$ fit $V = 5^2$, ideoque habebimus $a = 1$, $f = 2$; $b = 2$, $g = 5$, unde fiet $P = 3x - 1$. Hinc igitur fiet $V - PP = 3x^3 + 9xx + 6x$, quae est divisibilis per $(x-1)(x-2)$, cum sit $V - PP = (x-1)(x-2)3x$, quamobrem hoc casu erit $M = 3x$. Quocirca pro formula $3x^3 + 1$ quadrato aequanda aequatio canonica erit: $3x = 2(3x - 1)y + (x - 1)(x - 2)yy$. Altera igitur forma erit $yyxx + (6y - 3yy - 3)x + 2yy - 2y = 0$. Prior forma ex $Q = 0$ dat statim ipsos valores per se cognitos $x = 1$ et $x = 2$; at vero $R = 0$ dat $x = 0$. Altera forma ex $S = 0$ praebet $y = 0$ et $x = 0$; ex $U = 0$ fit $y = 0$ vel $y = 1$ quibus respondet $x = 0$ sicque habemus tres valores primitivos $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, quibus conveniunt $y = 0$; $y = 1$; $y = + \frac{3}{4}$; $y = + \frac{3}{5}$.

§. 25. Formulae jam directrices erunt:

$$y' = \frac{-2(3x-1)}{(x-1)(x-2)} - y \quad \text{et} \quad x' = \frac{3yy - 6y + 3}{yy} - x.$$

Hinc percurramus casus cognitos, ac primo quidem $x = 0$ et $y = 0$ nihil dat; at vero invertendo obtinetur:

$$y = 0;\ x = 0;\ y = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ \text{etc.}$$

unde patet primum valorem $x = 0$ ad nullos novos valores perducere. Sumamus igitur $x = 1$; $y = + \frac{3}{4}$ atque series erit:

$x = 1$; $y = +\frac{3}{4}$; $x = -\frac{2}{3}$; $y = \frac{3}{5}$: $x = 2$;
ordinem invertendo: $y = +\frac{3}{4}$; $x = 1$; $y = \infty$; $x = 2$. Denique si sumatur $x = 2$ et $y = \frac{3}{5}$ valores erunt:

$$x = 2;\ y = \tfrac{3}{5};\ x = -\tfrac{2}{3};\ y = \tfrac{3}{4};\ x = 1;\ y = \infty,$$

invertendo autem nihil prodit. Mirum est hanc aequationem canonicam pro x alios valores non suppeditare, praeter $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = -\frac{2}{3}$, cum tamen idem casus jam supra sit tractatus in exemplo primo, ubi adeo innumerabiles casus invenire licuit. Unde intelligitur plurimum interesse, ut aequatio canonica idonea eligatur. Praesenti scilicet casu perperam duo valores primitivi ad aequationem canonicam constituendam sunt adhibiti. Praestat enim unico valore cognito uti secundum problema I. quod operae pretium erit ostendisse.

§. 26. Utamur ergo unico valore cognito $x = 1$, quo casu fit $V = 4 = 2^2$, sicque habebimus $a = 1$ et $f = 2$. Per primum igitur problema habebimus $P = 2$, ideoque

$$QR = 3(x^3 - 1) = 3(x - 1)(xx + x + 1).$$

Sumamus ergo $Q = x - 1$ erit $R = 3(xx + x + 1)$ et aequatio canonica erit $(x - 1)yy + 4y - 3(xx + x + 1) = 0$ cujus altera forma est $-3xx + (yy - 3)x + 4y - yy - 3 = 0$ unde formulae directrices erunt:

$$y' = -\frac{4}{x - 1} - y \quad \text{et} \quad x' = \frac{yy - 3}{3} - x.$$

Ex priore autem aequatione, posito $Q = 0$ fit $x = 1$ cui respondet $y = \frac{9}{4}$; at vero posito $R = 0$ nullus prodit valor rationalis. Ex altera, aequatio $S = 0$ itidem nihil dat; at vero $U = 0$ dat $y = 1$ cui respondet $x = 0$ et $x = -\frac{2}{3}$; praeterea dat $y = 3$ cui respondet $x = 2$.

§. 27. Incipiamus ab $x = 1$ et $y = \frac{3}{4}$ et reperientur sequentes valores idonei:

$$x = 1;\ y = \tfrac{9}{4};\ x = -\tfrac{5}{16};\ y = \tfrac{67}{84};\ \text{etc.}$$

Inversio autem ordinis nihil praebet ob sequens $y = \infty$. Evolvamus ergo casum primitivum $y = 1$ et $x = 0$ fietque series valorum:

$$y = 1;\ x = 0;\ y = 3;\ x = 2;\ y = -7;\ x = \tfrac{40}{3};\ \text{etc.}$$

ordinem autem invertendo:

$$x = 0;\ y = 1;\ x = -\tfrac{2}{3};\ y = \tfrac{7}{5};\ x = \tfrac{8}{25};\ \text{etc.}$$

In his operationibus reliqui bini casus primitivi jam continentur, quos ergo superfluum foret prosequi. Atque hic jam omnes valores supra inventi prodierunt.

§. 28. Neque vero ob hanc circumstantiam secundum problema omni usu carere censendum est. Postquam enim pro exemplo allato sumto $P = 3x - 1$, invenimus

$$QR = 3(x-1)(x-2) \text{ et sumsimus}$$
$$Q = 3x \text{ et } R = (x-1)(x-2);$$

unde aliquos tantum valores pro x eruere licuit. At vero productum illud $3x(x-1)(x-2)$ aliis duobus modis in duos factores discerpi potest, sumendo vel $Q = 3(x-1)$ et $R = x(x-2)$, vel $Q = 3(x-2)$ et $R = x(x-1)$; tum vero hi duo casus secundum praecepta evoluti omnes valores idoneos pro x dedissent, uti tentanti facile patebit. Ex quo generatim hoc probe tenendum erit; quoties pro QR reperitur productum ex tribus vel quatuor factoribus simplicibus constans omnes plane resolutiones in duos factores pro Q et R sumendos in usum vocari et operationes supra traditas institui debere. Tum enim asseverare non dubito, omnes plane valores idoneos pro x repertum iri, id quod in sequentibus problematibus probe est observandum. Quamobrem progrediamur ad formulas biquadraticas, sub hac forma generali $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ contentas, ad quadratum reducendas.

Problema III.

Proposita tali formula quadrato aequanda:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = V,$$

quae quadratum evadat casu $x = a$, *eam ad formam* $P^2 + QR$ *reducere, hincque aequationem* $Qyy + 2Py - R = 0$ *formare.*

Solutio.

§. 29. Sumto $x = a$ fiat $V = ff$ et supra jam ostendimus, sumto $P = f$, unde fit $QR = V - ff$, hanc expressionem factorem habituram esse $x - a$; in altero ergo factore x ad tertiam potestatem ascendet, quem ergo neque pro Q neque pro R assumere licet, nisi forte factorem simplicem involvat, quem cum $x - a$ conjungere liceret. Quare hoc casu excepto negotium alio modo est instituendum, id quod facillime sequenti modo praestabitur.

§. 30. Cum formula proposita V posito $x = a$ quadratum praebeat $= ff$, ponatur statim $x = a + t$, atque manifestum est talem formulam esse prodituram: $V = ff + \alpha t + \beta tt + \gamma t^3 + \delta t^4$, quam ergo ad speciem $PP + QR$ reduci oportet. Hunc in finem sumamus $P = f + \frac{\alpha t}{2f}$, unde orietur

$$QR = V - PP = (\beta - \frac{\alpha\alpha}{4ff})\, tt + \gamma t^3 + \delta t^4,$$

quae ergo forma hos continet factores:

$$tt\,(\beta - \frac{\alpha\alpha}{4ff} + \gamma t + \delta tt),$$

quorum alterum pro Q alterum pro R assumere licebit; perinde vero est quinam pro Q vel pro R accipiatur. Tum autem aequatio canonica erit $Qyy + 2Py - R = 0$ unde facile altera forma ad potestates ipsius x accommodata formari poterit, quo facto constructio seriei literarum x et y nulla amplius laborat difficultate, cum constet casus $t = 0$, sive $x = a$. Quin etiam hic si lubuerit loco t valor $x - a$ restitui poterit.

§. 31. Alio autem praeterea modo aequatio canonica formari poterit ponendo $P = f + \frac{\alpha t}{2f} + \theta tt$ sumendo θ ita, ut etiam termi-

nus βtt tollatur quod fit posito $\theta = \frac{\beta}{2f^2} + \frac{\alpha\alpha}{8f^3}$; tum autem reperietur $QR = \gamma' t^3 + \delta' t^4 = t^3 (\gamma' + \delta' t)$, unde pro Q et R hi valores accipi poterunt: tt et $t(\gamma' + \delta' t)$. Reliqua vero ut ante expedientur.

Exemplum.

§. 32. Sit formula proposita $V = 2x^4 - 1$, quae casu $x = 1$ fit quadratum, sicque erit $a = 1$ et $f = 1$; unde posito $x = 1 + t$ fiet $V = 1 + 8t + 12tt + 8t^3 + 2t^4$; quare si pro priore solutione sumamus $P = 1 + 4t$, prodibit:

$$QR = V - PP = tt(2tt + 8t - 4).$$

Sumto ergo $Q = tt$ erit $R = 2tt + 8t - 4$, quocirca aequatio canonica erit $ttyy + 2(1 + 4t)y - (2tt + 8t - 4)$ cujus altera forma ad t instructa erit $(yy - 2)tt + (8y - 8)t + 2y + 4$; hincque formulae nostrae directrices erunt:

$$y' = -\frac{2(1+4t)}{tt} - y \quad \text{et} \quad t' = -\frac{8(y-1)}{yy-2} - t.$$

§. 33. Nunc vero valorem primitivum habemus $t = 0$, cui respondet $y = -2$; praeterea vero aequatio $U = 0$ etiam dat $y' = -2$, ita ut hi duo valores primitivi conveniant. Inchoëmus ergo nostram seriem a terminis $x = 0$ et $y = 2$ eaque erit

$$t = 0; \quad y = -2; \quad t = 12; \quad y = \frac{95}{72}; \text{ etc.}$$

hinc ergo valores ipsius x erunt $x = 1$ et $x = 13$.

§. 34. Applicemus etiam alteram solutionem et statuamus $P = 1 + 4t - 2tt$ fietque $QR = V - PP = tt(24t - 2tt)$ quia igitur alter factor necessario est tt sumamus $Q = tt$ et $R = 2t(12 - t)$, sicque aequatio canonica erit:

$$ttyy + 2(1 + 4t - 2tt)y - 2t(12 - t) = 0,$$

cujus altera igitur forma ita se habebit:

$$(yy - 4y + 2)tt + 8(y - 3)t + 2y = 0,$$

unde formantur directrices, qui erunt:

$$y' = -\frac{2(1+4t-2tt)}{tt} - y; \quad t' = -\frac{8(y-3)}{yy-4y+2} - t.$$

§. 35. Quod jam ad valores primitivos attinet, ex priore aequationis canonicae forma $Q=0$ dat $t=0$, cui respondet $y=0$; aequatio vero $R=0$ dat $t=12$, cui respondet $y=0$. Ex posteriore vero forma aequatio $S=0$ nullum dat valorem rationalem; et $U=0$ dat $y=0$, qui jam in praecedentibus continetur. Incipiamus ergo seriem a $t=0$ et $y=0$ et sequens terminus erit $t=12$; et quia alter primitivus $t=12$ jam occurrit, pro eo novam operationem instituere non est opus.

Problema IV.

Proposita formula biquadratica:

$$V = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

si duo dentur casus $x=a$ *et* $x=b$, *quibus ea fiat quadratum, eam reducere ad formam* $V=PP+QR$, *hincque aequationem canonicam constituere.*

Solutio.

§. 36. Pro casu $x=a$ fiat $V=ff$, et pro altero casu $x=b$ fiat $V=gg$, atque nunc pro P talis formula requiritur, ut QR obtineat factorem $(x-a)(x-b)$. Quamobrem, si ponatur vel $x=a$ vel $x=b$ fieri debet $PP=V$, ideoque $P=\sqrt{V}$. Hunc in finem statuamus $P=p+qx$, et quia pro casu $x=a$ fit $\sqrt{V}=f$, habebitur haec aequatio $p+qa=f$; pro altero vero casu $x=b$, fiet $p+bq=g$; ubi probe notandum est, litteras f et g tam negative quam positive accipi posse. At vero ex istis binis aequalitatibus colligitur: $p=\frac{bf-ag}{b-a}$ et $q=\frac{g-f}{b-a}$.

§. 37. Ex his igitur valoribus productum $QR = V - PP$ certo habebit factorem $(x - a)(x - b)$. Sit igitur

$$QR = M(x - a)(x - b),$$

ac si M nullos contineat factores rationales necessario statui debebit $Q = (x - a)(x - b)$ et $R = M$; at si M etiam involvat duos factores reales, puta $M = (x - \zeta)(x - \eta)$ uterque vel cum $x - a$ vel cum $x - b$ conjungi poterit unde duo novae positiones oriuntur, sicque tres aequationes canonicae formari poterunt.

Exemplum.

§. 38. Sit $V = 1 + 7xx + x^4$, quae forma casu $x = 0$ fit 1, casu vero $x = 1$ fit 9. Erit ergo $a = 0$, $f = \pm 1$; deinde $b = 1$ et $g = \pm 3$, unde aliud discrimen non nascitur nisi ex aequalitate et inaequalitate signorum. Sint igitur signa aequalia $f = 1$ et $g = 3$ fiet nostra formula $P = p + qx = 1 + 2x$. Pro casu vero $f = -1$ et $g = 3$ fit $P = p + qx = -1 + 4x$; utrumque ergo casum evolvamus.

§. 39. Pro priore erit $QR = V - P^2 = x^4 + 3xx - 4x$ sive $QR = x(x - 1)(xx + x + 4)$, ubi posterior factor nullas continet radices reales. Fiat ergo $Q = x(x-1)$ et $R = xx + x + 4$ et aequatio canonica erit:

$$x(x - 1)yy + 2(1 + 2x)y - (xx + x + 4) = 0,$$

cujus altera forma est:

$$(yy - 1)xx + (4y - yy - 1)x + 2y - 4 = 0,$$

unde hae formulae directrices oriuntur:

$$y' = -\frac{2(1 + 2x)}{x(x - 1)} - y; \quad x' = \frac{yy - 4y + 1}{yy - 1} - x.$$

§. 40. Ex priore forma aequationis canonicae aequatio $Q = 0$ praebet $x = 0$, cui respondet $y = 2$; deinde etiam praebet $x = 1$, cui respondet $y = 1$. Ex altera autem forma aequatio $S = 0$ fit vel $y = 1$, cui respondet $x = 1$, vel $y = -1$, cui

respondet $x = -1$. Denique ex aequatione $U = 0$ fit $y = 2$, cui respondet $x = 0$ et $x = -1$. Quia autem in formula proposita tantum potestates pares ipsius x occurrunt, perinde est, sive x habeat valorem negativum sive positivum, duo tantum valores primitivi relinquuntur $x = 0$ et $x = 1$, unde seriem quaeramus pro $x = 0$ et $y = 2$ quae erit $x = 0$; $y = 2$; $x = -1$; $y = \infty$; ordinem autem invertendo statim ad infinitum deducimur. Quare incipiamus ab $x = 1$ et $y = 1$ unde series oritur $x = 1$; $y = 1$; $x = \infty$, atque etiam invertendo nihil oritur. Unde concludere licet, formulam propositam quadratum fieri non posse praeter binos casus alias cognitos $x = 0$ et $x = 1$.

§. 41. Consideremus interim etiam casum quo $P = -1 + 4x$, eritque $QR = x^4 - 9xx + 8x = x(x-1)(xx-8)$ quamobrem sumamus $Q = x(x-1)$ et $R = xx - 8$ et aequatio canonica erit:

$$x(x-1)yy + 2(4x-1)y - (xx + x - 8) = 0,$$

cujus altera forma ita se habet:

$$(yy-1)xx + (8y - yy - 1)x - 2y + 8 = 0.$$

Formulae autem directrices erunt:

$$y' = -\frac{2(4x-1)}{x(x-1)} - y \text{ at } x' = -\frac{(8y - yy - 1)}{yy-1} - x.$$

§. 42. Hic iterum habemus valores primitivos $x = 0$ et $x = 1$, quorum priori respondet $y = 4$; posteriori vero $y = 1$. Ex altera forma prodit vel $y = +1$ vel $y = -1$, quorum illi respondet $x = -1$, huic vero $x = +1$. Denique ex $U = 0$ fit $y = 4$, cui respondet $x = 0$ et $x = -1$. Incipiamus a terminis $x = 0$ et $y = +2$ series valorum erit $x = 0$; $y = 4$; $x = -1$; $y = 1$; $x = \infty$. Sumamus $x = 1$ et $y = -\frac{7}{6}$, fiet series $x = 1$; $y = 1$; $x = \infty$. Hic jam reliqui casus omnes continentur, unde certum manet, alios praeterea nullos dari valores idoneos.

Problema V.

Si in formula proposita quadrato aequanda:

$$V = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

tres constent casus, quibus ea fit quadratum, scilicet $x = a$, $x = b$, $x = c$, *quibus fiat* $V = ff$, $V = gg$, $V = hh$, *eam reducere ad formam* $PP + QR$, *indeque aequationem canonicam formare.*

Solutio.

§. 43. Hic igitur quantitatem P ita definire oportet, ut productum $QR = V - PP$ obtineat factores $(x - a)(x - b)(x - c)$; quamobrem necesse est ut casibus $x = a$, $x = b$, $x = c$, fiat $QR = 0$, ideoque $PP = V$ et $P = \sqrt{V}$. Hunc in finem statuatur $P = p + qx + rxx$ et quia $x = a$ fit $V = ff$, ideoque $\sqrt{V} = \pm f$, casu vero $x = b$ erit $\sqrt{V} = \pm g$ et pro casu $x = 0$ habebitur $\sqrt{V} = \pm h$; unde nascuntur hae tres aequationes:

$$\text{I.} \quad \pm f = p + qa + raa,$$
$$\text{II.} \quad \pm g = p + qb + rbb,$$
$$\text{III.} \quad \pm h = p + qc + rcc.$$

Ex his jam tribus aequationibus eliciantur valores litterarum p, q, r, id quod pluribus modis fieri poterit ob signa ambigua radicum f, g, h; quibus inventis colligatur valor producti $QR = V - P^2$, quod cum jam habeat tres factores simplices $x - a$, $x - b$, $x - c$, quia non ultra quartam potestatem ipsius x ascendit, necesse est ut etiam quartus factor sit simplex, qui ergo novum valorem pro x suppeditabit.

§. 44. Quoniam igitur QR quatuor factores simplices continet, producta binorum pro litteris Q et R accipi poterunt; perinde autem est, utrum pro Q vel R assumatur, unde tres casus oriri poterunt, prout primus factor $x - a$ vel cum secundo $x - b$, vel cum tertio $x - c$ vel cum quarto modo invento combinetur.

Quacunque autem combinatione utamur posito $V = (P + Qy)^2$, ob $V = PP + QR$ orietur ista aequatio canonica $Qyy + 2Py - R = 0$ cujus deinde alteram formam $Sxx + Tx + U = 0$ elicere possumus, quo facto, constitutis formulis directricibus $y + y' = -\frac{2P}{Q}$ vel $yy' = -\frac{R}{Q}$; tum vero $x + x' = -\frac{T}{S}$ sive $xx' = \frac{U}{S}$, innumerabiles alios valores idoneos pro x investigare licebit, nisi forte numerus horum valorum ob indolem formulae propositae fuerit finitus.

§. 45. Si ex tribus aequationibus pro litteris p, q, r, datis has litteras in genere determinare vellemus in formulas valde complexas incideremus, cum tamen quovis casu oblato negotium facillime absolvatur. Quamobrem usum hujus solutionis in exemplo speciali ostendamus.

Exemplum

§. 46. Proposita sit ista formula $V = 1 + 3x^4$, quae his tribus casibus $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, evadit quadratum scilicet casu $x = 0$ fit $V = 1$, casu vero $x = 1$, fit $V = 4$, et casu $x = 2$ fit $V = 49$. Quamobrem posito $P = p + qx + rxx$ orientur tres sequentes aequationes:

1. Si $x = 0$ erit $\pm 1 = p$,
2. .. $x = 1$ .. $\pm 2 = p + q + r$
3. .. $x = 2$ .. $\pm 7 = p + 2q + 4r$.

Sumamus autem omnes tres radices positive eritque $p = 1$, duae reliquae vero aequationes erunt $1 = q + r$ et $6 = 2q + 4r$, unde eruitur $r = 2$ et $q = -1$ sicque habebimus $P = 1 - x + 2xx$.

§. 47. Hinc igitur reperiemus $QR = V - P^2$ h. e.

$$QR = -x^4 + 4x^3 - 5xx + 2x = -x(x-1)(x-2)(x-1)$$

quamobrem sumamus $Q = (x-1)^2$ et $R = -x(x-2)$ unde

ob $P = 1 - x + 2xx$ habebitur aequatio canonica:

$$(x-1)^2 yy + 2(1 - x + 2xx)y + x(x-2) = 0$$

cujus altera forma erit:

$$(yy + 4y + 1)xx - 2(yy + y + 1)x + y(y+2) = 0$$

unde formulae directrices oriuntur:

$$y' = -\frac{2(1 - x + 2xx)}{(x-1)^2} - y \text{ et } y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2 y}$$

$$x' = \frac{2(yy + y + 1)}{yy + 4y + 1} - x \text{ et } x' = \frac{y(y+2)}{(yy+4y+1)x}.$$

§. 48. Incipiamus a valore cognito $x = 0$, cui respondet $y = 0$, hincque series valorum erit:

$$x = 0;\ y = 0;\ x = 2;\ y = -14;\ x = \frac{28}{47};\ \text{etc.}$$

Invertendo autem ordinem prodeunt sequentes valores:

$$y = 0;\ x = 0;\ y = -2;\ x = -2;\ y = -\frac{4}{9};\ x = -\frac{28}{47};\ \text{etc.}$$

Sit nunc $x = 1$, cui respondet $y = \frac{1}{4}$, hinc series ista $x = 1$; $y = \frac{1}{4}$; $x = \frac{3}{11}$; etc. At invertendo haec $y = \frac{1}{4}$; $x = 1$; $y = \infty$. Superfluum foret a tertio valore $x = 2$, incipere, quia in praecedentibus jam continetur.

§. 49. Sumamus nunc $Q = x(x-1)$ eritque:

$$R = -(x-1)(x-2),$$

unde aequatio canonica erit:

$$x(x-1)yy + 2(1 - x + 2xx)y + (x-1)(x-2) = 0,$$

cujus altera forma est:

$$(yy + 4y + 1)xx - (yy + 2y + 3)x + 2(y+1) = 0.$$

Formulae ergo directrices erunt:

$$y' = -\frac{2(1 - x + 2xx)}{x(x-1)} - y \text{ sive } y' = \frac{x-2}{xy}$$

$$x' = \frac{yy + 2y + 3}{yy + 4y + 1} - x \text{ sive } x' = \frac{2(y+1)}{(yy+4y+1)x}.$$

§. 50. Incipiamus iterum ab $x = 0$, cui hic respondet $y = -1$, unde valores idonei hinc nati:

$$x = 0;\ y = -1;\ x = -1;\ y = -3;\ x = -2;$$
$$y = -\tfrac{2}{3};\ x = +\tfrac{3}{11};\ \text{etc.}$$

tum vero invertendo fiet $y = -1$; $x = 0$; $y = \infty$. Sit porro $x = 1$, cui respondet $y = 0$, unde sequentes deducuntur valores

$$x = 1;\ y = 0;\ x = 2;\ y = -7;\ x = -\tfrac{3}{11};\ y = \tfrac{25}{21};\ \text{etc.}$$

§. 51. Simili modo etiam reliqui casus aequationis canonicae tractari poterunt, ubi una quaepiam radicum f, g, h, sumitur negative, unde alii valores pro P oriuntur, verum his uberius evolvendis non immoror, cum quae hactenus sunt allata abunde sufficiant ad utilitatem et praestantiam hujus novae methodi declarandam.

VIII.

SOLUTIO PROBLEMATIS
AD ANALYSIN INFINITORUM INDETERMINATORUM REFERENDI.

Conventui exhibita die 20. Aug. 1781.

Problema, cujus heic solutionem tradere animus est, ita enunciatur: Propositis quotcunque functionibus p, q, r, s, t, etc., ejusdem variabilis v, invenire functionem x, ita comparatam; ut omnes, quos ecce formulae differentiales:

$$p\partial x, \quad q\partial x, \quad r\partial x, \quad s\partial x, \quad t\partial x, \text{ etc.}$$

evadant integrabiles, cujus solutio, breviter exposita ita se habet.

Postquam functiones datae pro lubitu certo ordine fuerint dispositae, veluti hoc modo: p, q, r, s, etc. ex iis deriventur sequentes functiones primi gradus:

$$q' = \frac{\partial q}{\partial p}, \quad r' = \frac{\partial r}{\partial p}, \quad s' = \frac{\partial s}{\partial p}, \quad t' = \frac{\partial t}{\partial p}, \text{ etc.}$$

Ex his simili modo formentur sequentes secundi gradus:

$$r'' = \frac{\partial r'}{\partial q'}, \quad s'' = \frac{\partial s'}{\partial q'}, \quad t'' = \frac{\partial t'}{\partial q'}, \text{ etc.}$$

quarum numerus jam unitate minor est quam numerus praecedentium. Hinc porro deducantur functiones gradus tertii, quae erunt $s''' = \frac{\partial s''}{\partial r''}$, $t''' = \frac{\partial t''}{\partial r''}$, etc. quarum numerus iterum unitate minor est praecedentium numero, et ita porro, ita ut si functionum propositarum numerus fuerit 5, ultima sit $t'''' = \frac{\partial t'''}{\partial s'''}$.

Jam simili ratione ex functione quaesita x formemus alias per similes gradus, quae sint:

$$x = \frac{\partial x'}{\partial p},\ x' = \frac{\partial x''}{\partial q'},\ x'' = \frac{\partial x'''}{\partial r''},\ x''' = \frac{\partial x''''}{\partial r'''},\ \text{etc.}$$

unde vicissim habebimus sequentes determinationes:

$$\partial x' = x\partial p,\ \partial x'' = x'\partial q',\ \partial x''' = x''\partial r'',\ \text{etc.}$$

His formulis cum praecedentibus conjunctis sequentes determinationes seu reductiones formularum primi gradus:

$$q'\partial x' = x\partial q;\ r'\partial x' = x\partial r;\ s'\partial x' = x\partial s;\ t'\partial x' = x\partial t;\ \text{etc.}$$

Eodem modo formulae secundi gradus ad primum reducentur, cum sit etiam

$$r''\partial x'' = x'\partial r',\ s''\partial x'' = x'\partial s',\ t''\partial x'' = x'\partial t',\ \text{etc.};$$

porro formulae tertii gradus ad secundum, ob

$$s'''\partial x''' = x''\partial s'',\ t'''\partial x''' = x''\partial t'',\ \text{etc.}$$

et ita porro.

Cum jam in ordine litterarum x, x', x'', x''', x'''', etc. perventum fuerit ad ultimam, quae casu quinque functionum erit x^{V}, pro ea accipiatur ad lubitum functio quaecunque ipsius v, quae sit V, ita ut habeamus $x^{\text{V}} = \text{V}$, atque hinc praecedentes omnes sponte determinabuntur, cum sit:

$$x^{\text{IV}} = \frac{\partial \text{V}}{\partial t^{\text{IV}}},\ x''' = \frac{\partial x^{\text{IV}}}{\partial s'''},\ x'' = \frac{\partial x'''}{\partial r''},\ x' = \frac{\partial x''}{\partial q'},\ x = \frac{\partial x'}{\partial p}.$$

His jam valoribus inventis integralia omnium formularum quae requiruntur, ita se habebunt:

$$\int p\,\partial x = px - x'$$
$$\int q\,\partial x = qx - q'x' + x''$$
$$\int r\,\partial x = rx - r'x' + r''x'' - x'''$$
$$\int s\,\partial x = sx - s'x' + s''x'' - s'''x''' + x^{\text{IV}}$$
$$\int t\,\partial x = tx - t'x' + t''x'' - t'''x''' + t^{\text{IV}}x^{\text{IV}} - x^{\text{V}}$$

etc. etc.

quarum formularum veritas per differentiationem sponte elucet.

Ex his jam tota Problematis solutio est manifesta, sive numerus functionum propositarum fuerit major sive minor. Quovis enim casu valor ipsius x semper per differentialia ejusdem gradus, quot fuerint functiones propositae exprimatur, ita ut, si duae tantum proponantur quantitas x ad differentialia secundi gradus ascendet, si ternae ad differentialia tertii ordinis et ita porro.

Hic denique observandum occurit, prouti functiones propositae alio atque alio modo disponantur, ad integralia maxime diversa perventum iri, quae tamen omnia inter se convenire necesse est siquidem quilibet ordo ad solutionem generalem perducit. Revera autem quaelibet horum integralium forma ad quamlibet aliam reduci potest, si loco functionis V assumamus TV. Semper enim littera T ita determinari potest ut quaelibet forma integralium ad quamlibet aliam reducatur.

IX.

DE INFINITIS CURVIS ALGEBRAICIS,

QUARUM LONGITUDO INDEFINITA ARCUI ELLIPTICO AEQUATUR.

Conventui exhibita die 20. Aug. 1781.

§. 1. Proposueram ante aliquot annos duo Theoremata, quae mihi quidem omni attentione digna videbantur, quorum altero statui, nullam prorsus dari curvam algebraicam, cujus longitudo indefinita cuipiam logarithmo aequatur; altero vero negavi, praeter circulum ullam exhiberi posse curvam algebraicam, cujus longitudo indefinita arcui cuipiam circulari aequatur. Utrum vero aliae dentur lineae curvae quarum rectificatio ita ipsis sit propria, ut eadem nullis aliis curvis algebraicis conveniat, quaestio est maxime ardua.

§. 2. Inveni quidem nonnullas curvas algebraicas, quarum longitudo indefinita aequatur arcui elliptico atque adeo etiam parabolico; at vero nullam adhuc investigare mihi licuit ejusmodi curvam algebraicam, cujus rectificatio cum hyperbola conveniret. Nuper autem incidi in ejusmodi formulas quae infinitas praebent curvas algebraicas quarum omnium longitudo indefinita ad arcum ellipticum reduci potest, quas idcirco curvas hic in medium attulisse operae pretium videtur, siquidem hoc argumentum plane est novum neque a quoquam satis dilucide pertractatum.

§. 3. Condiseravi scilicet curvam, cujus coordinatae orthogonales x et y his formulis exprimantur:

$$x = \frac{a\cos(n+1)\Phi}{n+1} + \frac{b\cos(n-1)\Phi}{n-1},$$
$$y = \frac{a\sin(n+1)\Phi}{n+1} + \frac{b\sin(n-1)\Phi}{n-1}.$$

Hinc ergo erit:

$$\frac{\partial x}{\partial\Phi} = -a\sin(n+1)\Phi - b\sin(n-1)\Phi$$
$$\frac{\partial y}{\partial\Phi} = \quad a\cos(n+1)\Phi + b\cos(n-1)\Phi.$$

Hinc ergo erit elementum curvae:

$$\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial\Phi\sqrt{aa + bb + 2ab\cos 2\Phi},$$

quae formula manifesto rectificationem ellipsis involvit. Nam si coordinatae statuantur in ellipsi:

$$X = f\cos\Phi \text{ et } Y = g\sin\Phi \text{ erit}$$
$$\sqrt{\partial X^2 + \partial Y^2} = \partial\Phi\sqrt{ff\sin\Phi^2 + gg\cos\Phi^2},$$

quae formula, ob $\sin\Phi^2 = \frac{1-\cos 2\Phi}{2}$ et $\cos\Phi^2 = \frac{1+\cos 2\Phi}{2}$ abit in hanc: $\partial\Phi\sqrt{\frac{ff+gg}{2} + \frac{gg-ff}{2}\cos 2\Phi}$, ubi, si sumamus $g = a + b$ et $f = a - b$ ipsa nostra formula resultat, ita ut ellipseos eandem rectificationem habentis sint semiaxes $a + b$ et $a - b$.

§. 4. Quoniam igitur in elemento curvae $\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ numerus n non inest, ideoque arbitrio nostro prorsus relinquitur, manifestum est, innumerabiles exhiberi posse curvas algebraicas, quarum arcus adeo datae ellipseos arcubus aequentur, quae omnes curvae inter se maxime erunt diversae, atque pro variis valoribus, loco n assumtis, ad ordines curvarum algebraicarum plurimum diversos erunt referendae. Neque tamen hinc sequitur, etiamsi circulus sit species ellipsis, pro circulo quoque alias diversas curvas ejusdem rectificationis hoc modo assignari posse. Cum enim circulus prodeat, si ambo semiaxes f et g statuantur aequales, necesse est ut vel a vel b evanescat. Sumto autem $b = 0$ erit:

$$x = \frac{a\cos(n+1)\Phi}{n+1} \quad\text{et}\quad y = \frac{a\sin(n+1)\Phi}{n+1},$$

sicque erit $xx + yy = \frac{aa}{(n+1)^2}$; quicquid pro n accipiatur semper igitur circulus oritur.

§. 5. Cum autem casu in istas formulas tantum incidissim, utique operae pretium erit in ejusmodi Analysin inquirere, quae, proposita Ellipsi, via directa ad formulas supra §. 3. allatas manuducat, quem in finem sequens Problema resolvendum suscipio.

Problema.

Proposita ellipsi, cujus coordinatae orthogonales X et Y his formulis definiantur:

$$X = 2f\cos\theta \quad et \quad Y = 2g\sin\theta,$$

invenire innumerabiles alias curvas algebraicas, quae cum ista ellipsi communem rectificationem sortiantur.

Solutio.

§. 6. Sint x et y coordinatae curvarum quaesitarum, et cum esse oporteat $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial X^2 + \partial Y^2$ haec conditio implebitur, si sumatur:

$$\partial x = \partial X \cos\Phi + \partial Y \sin\Phi$$
$$\partial y = \partial X \sin\Phi - \partial Y \cos\Phi.$$

Jam quia hae formulae differentiales integrationem admittere debent, integrentur, qua fieri licet, more solito, ac reperietur:

$$x = X\cos\Phi + Y\sin\Phi + \int\partial\Phi\,(X\sin\Phi - Y\cos\Phi)$$
$$y = X\sin\Phi - Y\cos\Phi - \int\partial\Phi\,(X\cos\Phi + Y\sin\Phi).$$

§. 7. Cum jam sit $X = 2f\cos\theta$ et $Y = 2g\sin\theta$ sumamus angulum $\Phi = n\theta$ eritque per notas angulorum reductiones:

$$X\sin\Phi = f\sin(n+1)\theta + f\sin(n-1)\theta$$
$$X\cos\Phi = f\cos(n+1)\theta + f\cos(n-1)\theta$$
$$Y\sin\Phi = -g\cos(n+1)\theta + g\cos(n-1)\theta$$
$$Y\cos\Phi = g\sin(n+1)\theta - g\sin(n-1)\theta.$$

Ex his jam valoribus colligitur:

$$X \sin\Phi - Y\cos\Phi = (f-g)\sin(n+1)\theta + (f+g)\sin(n-1)\theta$$
$$X\cos\Phi + Y\sin\Phi = (f-g)\cos(n+1)\theta + (f+g)\cos(n-1)\theta,$$

quae aequationes, ductae in $\partial\Phi = n\partial\theta$, et integratae, si brevitatis gratia ponatur $f+g=b$ et $f-g=a$, dabunt:

$$\int\partial\Phi(X\sin\Phi - Y\cos\Phi) = -\frac{na\cos(n+1)\theta}{n+1} - \frac{nb\cos(n-1)\theta}{n-1}$$
$$\int\partial\Phi(X\cos\Phi + Y\sin\Phi) = +\frac{na\sin(n+1)\theta}{n+1} + \frac{nb\sin(n-1)\theta}{n-1}.$$

§. 8. Si igitur pro integralibus hi valores substituantur, nostrae coordinatae erunt:

$$x = \begin{array}{l} a\cos(n+1)\theta + b\cos(n-1)\theta \\ -\frac{na}{n+1}\cos(n+1)\theta - \frac{nb}{n-1}\cos(n-1)\theta \end{array}$$
$$y = \begin{array}{l} a\sin(n+1)\theta + b\sin(n-1)\theta \\ -\frac{na}{n+1}\sin(n+1)\theta - \frac{nb}{n-1}\sin(n-1)\theta. \end{array}$$

At binis membris rite conjunctis istae coordinatae pro curvis quaesitis cum ellipsi communem rectificationem habentibus, ita erunt expressae:

$$x = \frac{a}{n+1}\cos(n+1)\theta - \frac{b}{n-1}\cos(n-1)\theta$$
$$y = \frac{a}{n+1}\sin(n+1)\theta - \frac{b}{n-1}\sin(n-1)\theta,$$

quae expressiones a supra allatis aliter non differunt nisi quod hic littera b negative sit sumta. Ubi notandum, casu quo $n=0$ ipsam ellipsin esse prodituram. Posito enim $n=0$ fiet:

$$x = (a+b)\cos\theta \quad \text{et} \quad y = (a-b)\sin\theta.$$

§. 9. Si sumatur $n=2$ prodibit sine dubio curva post ellipsin simplicissima. Reperietur autem:

$$x = \frac{a}{3}\cos 3\theta - b\cos\theta \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{3}\sin 3\theta - b\sin\theta.$$

Loco $\frac{a}{3}$ scribamus litteram c et quaeramus chordam $\sqrt{xx+yy} = z$,

eritque $zz = cc + bb - 2bc\cos 2\theta$, consequenter $\cos 2\theta = \frac{bb+cc-zz}{2bc}$, hincque $\sin\theta = \sqrt{\frac{zz-(b-c)^2}{2bc}}$ et $\cos\theta = \sqrt{\frac{(b+c)^2-zz}{2bc}}$. Hinc, cum sit $\sin 3\theta = 4\sin\theta\cos\theta^2 - \sin\theta$ et $\cos 3\theta = 4\cos\theta^3 - 3\cos\theta$, si angulus θ eliminetur eruetur aequatio inter ipsas coordinatas x et y, quae autem ad plures dimensiones assurget.

§. 10. Methodus, qua has formulas indagavimus etiam multo latius patet atque ad alias curvas loco ellipsis assumtas extendi poterit. Si enim coordinatae pro curva data fuerint:

$$X = 2f\cos\alpha\theta + 2f'\cos\beta\theta + \text{etc.}$$
$$Y = 2g\sin\alpha\theta + 2g'\sin\beta\theta + \text{etc.}$$

pro reliquis curvis cum proposita communem rectificationem habentibus, ponendo iterum:

$$f - g = a;\ f + g = b \text{ et } f' - g' = a';\ f' + g' = b',$$

fiet

$$x = \frac{\alpha a}{n+\alpha}\cos(n+\alpha)\theta - \frac{\alpha b}{n-\alpha}\cos(n-\alpha)\theta + \frac{\beta a'}{n+\beta}\cos(n+\beta)\theta - \frac{\beta b'}{n-\beta}\cos(n-\beta)\theta + \text{etc.}$$

$$y = \frac{\alpha a}{n+\alpha}\sin(n+\alpha)\theta - \frac{\alpha b}{n-\alpha}\sin(n-\alpha)\theta + \frac{\beta a'}{n+\beta}\sin(n+\beta)\theta - \frac{\beta b'}{n-\beta}\sin(n-\beta)\theta + \text{etc.}$$

Ubi iterum, ob n numerum indefinitum innumerabiles curvae prodeunt.

X.

DE INFINITIS CURVIS ALGEBRAICIS,

QUARUM LONGITUDO ARCUI PARABOLICO AEQUATUR.

Conventui exhibita die 20. Aug. 1781.

Problema.

Fig. 1. *Proposita parabola AYC, ad axem AB relata, cujus parameter sit AB = BC, invenire innumeras curvas algebraicas AZ, quarum arcus AZ aequales sint arcui parabolico AY.*

Constructio.

Ad axem AB, retro productam in F usque eadem describatur Parabola AG. In hac axe capiatur pro lubitu punctum F, ita tamen ut, ducta applicata FG, haec recta FG ad Parametrum AB rationem teneat rationalem, quae sit $\frac{AB}{FG} = n$. Tum enim ex quolibet tali puncto F construi poterit una curva AZ quaestioni satisfaciens.

Pro Parabolae enim puncto quocunque Y, abscissâ AX et applicatâ XY determinato, rectae FG normaliter jungatur GV = XY, ut obtineatur angulus GFV = θ; quo invento capiatur angulus AFZ = $n\theta$, sumaturque FZ = FX, eritque Z punctum in curva quaesita, cujus arcus AZ aequalis erit arcui AY. Hoc igitur modo, cum punctum F infinitis modis assumi possit, construentur innumerae curvae AZ ejusdem indolis eademque proprietate gaudentes.

Demonstratio.

Posito $AB = BC = 2a$ sit $AX = x$ et $XY = y$, ideoque $yy = 2ax$, unde fit $\partial x = \frac{y\partial y}{a}$ et elementum Parabolae

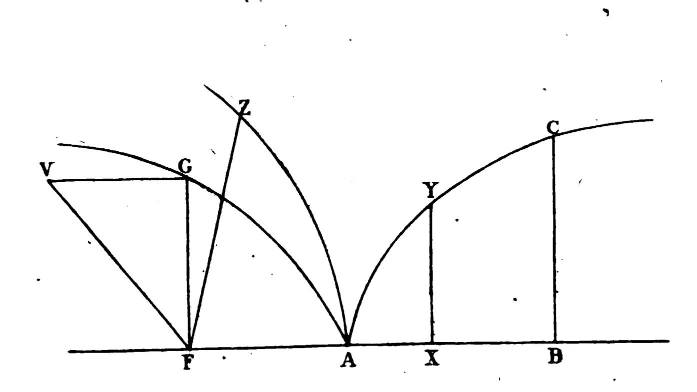
$$\partial s = \partial y \sqrt{1 + \frac{yy}{aa}}.$$

Jam ponatur $AF = f$ et $FG = g$ erit quoque $gg = 2af$. Jam vocetur $FZ = FX = f + x = z$ atque angulus $AFZ = \Phi$ eritque elementum curvae quaesitae $= \sqrt{\partial z^2 + zz\partial\Phi^2}$. Fieri ergo debet:

$$\partial z^2 + zz\partial\Phi^2 = \partial y^2 + \frac{yy\partial y^2}{aa}.$$ Cum igitur sit:

$\partial z = \partial x = \frac{y\partial y}{a}$ fiet $zz\partial\Phi^2 = \partial y^2$ ideoque $\partial\Phi = \frac{\partial y}{z}$. Est vero $f = \frac{gg}{2a}$ et $x = \frac{yy}{2a}$, ergo $\partial\Phi = \frac{2a\partial y}{gg+yy}$ consequenter $\Phi = \frac{2a}{g}$ A tag $\frac{y}{g}$.

At vero est Arc tag $\frac{y}{g} = \theta$, et $\frac{2a}{g} = n$, ideoque $\Phi = n\theta$. Sumto ergo angulo $AFZ = n\theta$ et recta $FZ = FX$ punctum Z in tali erit curva, cujus elementum elemento Parabolae aequatur.



XI.

DE BINIS CURVIS ALGEBRAICIS EADEM RECTIFICATIONE GAUDENTIBUS.

Conventui exhibita die 20. Aug. 1781.

§. 1. Sint x et y coordinatae orthogonales unius, at X et Y alterius curvae, et quaestio eo redit, ut fiat $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial X^2 + \partial Y^2$, ita tamen, ut omnes expressiones prodeant algebraicae. Hujus igitur Problematis duplicem hic sum traditurus solutionem, quae cum plurimum a se invicem discrepare videantur earum quoque consensum ostendere conveniet.

Solutio prior.

§. 2. Cum igitur reddi oporteat $\partial X^2 + \partial Y^2 = \partial x^2 + \partial y^2$, hoc praestabitur, si statuamus:

$$\partial X = \partial x \cos \Phi + \partial y \sin \Phi$$
$$\partial Y = \partial x \sin \Phi - \partial y \cos \Phi$$

ubi ergo angulum Φ ita comparatum esse necesse est, ut hae duae formulae integrationem admittant. Ad hoc efficiendum utar methodo olim a me tradita, ubi prima quasi elementa analyseos Infinitorum indeterminatae exposui. Tum igitur prodibit:

$$X = x \cos \Phi + y \sin \Phi + \int \partial \Phi (x \sin \Phi - y \cos \Phi)$$
$$Y = x \sin \Phi - y \cos \Phi - \int \partial \Phi (x \cos \Phi + y \sin \Phi).$$

Ubi ergo has duas formulas integrales integrabiles reddi oportet, id quod nulla difficultate laborat.

§. 3. Statuamus enim:

$$\int \partial \Phi (x \sin \Phi - y \cos \Phi) = P; \quad \int \partial \Phi (x \cos \Phi + y \sin \Phi) = Q$$

eritque

$$x \sin\Phi - y \cos\Phi = \frac{\partial P}{\partial \Phi}; \quad x \cos\Phi + y \sin\Phi = \frac{\partial Q}{\partial \Phi}$$

ubi ergo pro P et Q functiones quascunque algebraicas ipsarum $\sin\Phi$ et $\cos\Phi$ accipere licet. Tum vero ex his duabus aequationibus ipsae coordinatae x et y sequenti modo determinantur:

$$x = \frac{\partial P \sin\Phi + \partial Q \cos\Phi}{\partial\Phi}$$

$$y = \frac{\partial Q \sin\Phi - \partial P \cos\Phi}{\partial\Phi}.$$

Ex quibus jam coordinatae alterius curvae sponte determinantur:

$$X = \frac{\partial Q}{\partial\Phi} + P; \quad Y = \frac{\partial P}{\partial\Phi} - Q.$$

Hinc ergo nullo plane labore innumerabilia binarum curvarum algebraicarum paria exhiberi poterunt, quae eadem rectificatione erunt praeditae.

§. 4. Quo hoc clarius appareat, sumamus differentialia capiendo $\partial\Phi$ constante, ac reperietur:

$$\partial x = \frac{\partial\partial P \sin\Phi + \partial\partial Q \cos\Phi}{\partial\Phi} + \partial P \cos\Phi - \partial Q \sin\Phi$$

$$\partial y = \partial\partial Q \sin\Phi - \partial\partial P \cos\Phi + \partial Q \cos\Phi + \partial P \sin\Phi$$

unde colligitur

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \frac{\partial\partial P^2 + \partial\partial Q^2}{\partial\Phi^2} + \frac{2(\partial P \partial\partial Q - \partial Q \partial\partial P)}{\partial\Phi} + \partial P^2 + \partial Q^2.$$

Simili modo pro altera curva habebimus:

$$\partial X = \frac{\partial\partial Q}{\partial\Phi} + \partial P \quad \text{et} \quad \partial Y = \frac{\partial\partial P}{\partial\Phi} - \partial Q,$$

ex quibus pro arcus elemento erit

$$\partial X^2 + \partial Y^2 = \frac{\partial\partial Q^2 + \partial\partial P^2}{\partial\Phi^2} + \frac{2(\partial P \partial\partial Q - \partial Q \partial\partial P)}{\partial\Phi} + \partial P^2 + \partial Q^2$$

ideoque $\partial X^2 + \partial Y^2 = \partial x^2 + \partial y^2$, uti requiritur.

Solutio posterior.

§. 5. Cum effici debeat $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial X^2 + \partial Y^2$ erit $\partial x^2 - \partial X^2 = \partial Y^2 - \partial y^2$, ad quam aequationem resolvendam statuamus $x + X = M$; $x - X = m$; $Y + y = N$; $Y - y = n$, quo facto fieri debet $\partial M \partial m = \partial N \partial n$, consequenter $\frac{\partial M}{\partial n} = \frac{\partial N}{\partial m}$, quarum duarum fractionum utraque ponatur $= t$ ut habeamus primo

$\partial M = t\partial n$, ideoque $M = tn - \int n\partial t$. Simili modo pro altera erit $\partial N = t\partial m$, ergo $N = tm - \int m\partial t$.

§. 6. Hoc igitur modo novam variabilem t in calculum introduximus ex qua ipsas coordinatas facile definire licebit. Ponamus enim $\int n\partial t = U$, ut fiat $n = \frac{\partial U}{\partial t}$, hinque $M = \frac{t\partial U}{\partial t} - U$. Simili modo, ponendo $\int m\partial t = V$ habebimus $m = \frac{\partial V}{\partial t}$, hinc $N = \frac{t\partial V}{\partial t} - V$, ubi U et V denotent functiones quascunque ipsius t.

§. 7. Ex his jam valoribus ipsae coordinatae utriusque curvae sponte se produnt. Cum enim sit

$$x = \frac{M+m}{2};\ X = \frac{M-m}{2};\ Y = \frac{N+n}{2};\ y = \frac{N-n}{2};$$

nihil impedit quominus has formulas duplicemus hincque coordinatae utriusque curvae sequenti modo exprimentur:

$$x = \frac{t\partial U - U\partial t + \partial V}{\partial t};\quad X = \frac{t\partial U - U\partial t - \partial V}{\partial t};$$

$$y = \frac{t\partial V - V\partial t - \partial U}{\partial t};\quad Y = \frac{t\partial V - V\partial t + \partial U}{\partial t}.$$

§. 8. Videamus nunc etiam, quomodo hae formulae quaestioni propositae satisfaciant. Ac sumto elemento ∂t constante elementa pro priore curva erunt:

$$\partial x = \frac{t\partial\partial U + \partial\partial V}{\partial t};\quad \partial y = \frac{t\partial\partial V - \partial\partial U}{\partial t},\quad \text{unde fit}$$

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \frac{(1+tt)(\partial\partial U^2 + \partial\partial V^2)}{\partial t^2}.$$

Pro altera curva habebimus:

$$\partial X = \frac{t\partial\partial U - \partial\partial V}{\partial t};\quad \partial Y = \frac{t\partial\partial V + \partial\partial U}{\partial t},\quad \text{hincque}$$

$$\partial X^2 + \partial Y^2 = \frac{(1+tt)(\partial\partial U^2 + \partial\partial V^2)}{\partial t^2}.$$

§. 9. Quamquam hae duae solutiones toto coelo a se invicem discrepare videntur, tamen nullum dubium, quin inter se pul-

cherrime consentiant, cum utraque omnes plane casus satisfacientes complecti debeat. Interim tamen, si solutiones simpliciores desideremus prior ad hunc scopum magis apta deprehenditur, quippe quae ita restricta ut ponatur $Q = 0$ adhuc plurimas solutiones memorabiles suppeditat. Posito autem $Q = 0$ coordinatae binarum curvarum per formulas istas simplicissimas exprimentur:

$$x = \frac{\partial P \sin \Phi}{\partial \Phi}; \quad X = P$$

$$y = \frac{\partial P \cos \Phi}{\partial \Phi}; \quad Y = \frac{\partial P}{\partial \Phi}.$$

Ubi cum sit $P = X$ adeo immediate ex posteriore curva ad priorem procedere licebit, ita ut altera curvarum quaesitarum nunc quasi cognita spectari possit, id quod in formulis generalibus nullo modo fieri potest. Hanc igitur solutionem, etsi maxime particularem fusius prosequi conveniet, ubi quidem litteras majusculas et minusculas inter se permutemus.

Solutio particularis,
has coordinatas complectens:

$$x = P; \quad X = \frac{\partial P \sin \Phi}{\partial \Phi}$$

$$y = \frac{\partial P}{\partial \Phi}; \quad Y = \frac{\partial P \cos \Phi}{\partial \Phi}.$$

§. 10. Cum hic pro priore curva sit $P = x$ erit $y = \frac{\partial x}{\partial \Phi}$, unde fit $\partial \Phi = \frac{\partial x}{y}$; cum igitur $\partial \Phi$ sit elementum arcus circularis, quoties aequatio inter x et y ita fuerit comparata, ut formula integralis $\int \frac{\partial x}{y}$ arcum circularem exprimat, toties alia curva exhiberi poterit eandem rectificationem involvens, quippe pro qua habebitur 1°) $\frac{X}{Y} = \text{tag } \Phi$; deinde quoque habebitur:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\partial x}{\partial \Phi} = y,$$

ita ut chorda curvae quaesitae semper aequalis sit applicatae alterius curvae. Tales igitur casus accuratius evolvere operae erit pretium.

Evolutio casus
quo pro curva data est $y = \frac{aa + xx}{b}$.

§. 11. Hic statim patet istam aequationem pertinere ad Parabolam, cujus parameter $= b$, eamque adeo permanere eandem, utcunque quantitas a immutetur, cum tantum initium applicatarum mutetur, quamobrem si curva quaesita ab a pendebit, hinc infinitae adeo curvae diversae reperientur quae cum parabola communi gaudeant rectificatione.

§. 12. Hinc igitur fiet $\partial \Phi = \frac{b dx}{aa + xx}$, ubi ponamus $b = na$, ut integrando prodeat $\Phi = n \text{A tag} \frac{x}{a}$. Quia igitur volumus ut parameter b invariatus maneat, erit $a = \frac{b}{n}$, sive $n = \frac{b}{a}$, ita ut numerus n rationem inter parametrum b et quantitatem arbitrariam a involvat. Hinc igitur fiet $x = a \text{ tag} \frac{\Phi}{n}$. Unde patet, ut formulae nostrae prodeant algebraicae, numerum n absolute rationalem esse debere; alioquin enim ad genus quantitatum quae interscendentes appellari solent devolveremur.

§. 13. Cum igitur hinc sit $\partial x = \frac{a \partial \Phi}{n \cos \frac{\Phi^2}{n}}$, erit pro curva quaesita $\sqrt{X^2 + Y^2} = y$ et $\frac{X}{Y} = \text{tag } \Phi$. Quia igitur angulus Φ ex ipsa aequatione pro curva data innotescit, haec curva facile geometrice construi poterit, atque constructio eadem plane prodit, quam non ita pridem pro infinitis curvis algebraicis, quae cum parabola communem rectificationem habeant, dedi.

Evolutio casus,
quo pro curva data est $ny = \sqrt{aa - xx}$.

§. 14. Hic igitur erit $\partial \Phi = \frac{\partial x}{y} = \frac{n \partial x}{\sqrt{aa - xx}}$ ideoque $\Phi = n\text{A sin} \frac{x}{a}$, unde fit $x = a \sin \frac{\Phi}{n}$ et $y = \frac{a}{n} \cos \frac{\Phi}{n}$. Evidens

autem est hanc curvam datam esse ellipsin cujus alter semiaxis $= a$, alter vero $\frac{a}{n}$. Pro curva quaesita igitur habebimus ejus chordam $\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{a}{n} \cos \frac{\Phi}{n}$ et $\frac{X}{Y} = \tan \Phi$, unde iterum constructio facillima deducitur, si modo n fuerit numerus rationalis. Cognita enim chorda et angulo quo ea ad axem fixum inclinatur constructio facillime expedietur.

§. 15. Hic ante omnia observasse juvabit, si pro data curva circulum accipiamus, ut sit $n = 1$, fore $y = \sqrt{aa - xx}$. Ponamus brevitatis gratia $\sqrt{X^2 + Y^2} = Z$, et cum sit $y = Z = \sqrt{aa - xx}$, erit $x = \sqrt{aa - ZZ}$, hincque $\tan \Phi = \frac{X}{Y} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{aa - ZZ}}{Z}$. Hinc fiet $\frac{X^2}{Y^2} = \frac{aa - ZZ}{ZZ}$ sive $ZZ(XX + YY) = aaYY$ seu $Z^4 = aaYY$ atque $ZZ = aY$, quae est aequatio pro circulo, ita ut etiam nunc nulla curva exhiberi posse videatur, quae cum circulo communi rectificatione gaudeat praeter ipsum circulum.

§. 16. Consideremus etiam casum quo $n = 2$ quo fit

$$x = \sin \frac{\Phi}{2} \text{ et } y = \frac{a}{2} \cos \frac{\Phi}{2}.$$

Hinc igitur erit $Z = \frac{a}{2} \cos \frac{\Phi}{2}$. Cum igitur sit $\tan \Phi = \frac{X}{Y}$ erit $\cos \Phi = \frac{Y}{Z}$. Cum autem $\cos \frac{1}{2} \Phi = \sqrt{\frac{1 + \cos \Phi}{2}}$, pro curva quaesita oritur haec aequatio:

$$Z = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{Z + Y}{2Z}}, \text{ ideoque } 8Z^3 = aa(Z + Y),$$

quae expressio, ob $Z = \sqrt{XX + YY}$ ad rationalitatem perducta ad gradum sextum ascendit.

Evolutio casus,

quo pro curva data est $ny = b + \sqrt{aa - xx}$.

§. 17. Evidens est hanc aequationem semper esse pro ellipsi, quicunque valor litterae b tribuatur, atque adeo casu $n = 1$

hanc curvam fore circulum. Tum autem habebimus $\partial\Phi = \frac{n\,\partial x}{b+\sqrt{aa-xx}}$, quae expressio, posito $x = \frac{2au}{1+uu}$, unde fit $\partial x = \frac{2a\,\partial u(1-uu)}{(1+uu)^2}$ et $\sqrt{aa-xx} = \frac{a(1-uu)}{1+uu}$, induit hanc formam: $\partial\Phi = \frac{2na\,\partial u(1-uu)}{(1+uu)(b+a+uu(b-a))}$ quam in duas hujusmodi partes discerpere licet

$$\frac{\alpha\,\partial u}{1+uu} + \frac{\beta\,\partial u}{b+a+(b-a)uu},$$

quarum integratio utraque ad arcum circuli deducitur, si modo fuerit $b > a$.

§. 18. Resolutione autem facta reperitur $\alpha = 2n$ et $\beta = -2nb$, ita ut habeamus $\partial\Phi = \frac{2n\,\partial u}{1+uu} - \frac{2nb\,\partial u}{b+a+(b-a)uu}$. Cum jam in genere sit $\int\frac{\partial u}{f+guu} = \frac{1}{\sqrt{fg}}\,\text{A tag}\,\frac{u\sqrt{g}}{\sqrt{f}}$, erit

$$\Phi = 2n\,\text{A tag}\,u - \frac{2nb}{\sqrt{bb-aa}}\,\text{A tag}\,u\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}.$$

Haec igitur aequatio ut primo fiat realis necesse est ut sit $b > a$; deinde ut etiam algebraica fiat necesse est ut tam $2n$ quam $\frac{2nb}{\sqrt{bb-aa}}$ sint numeri rationales. Hunc in finem ejusmodi rationem inter b et a statui oportet, ut fiat $\frac{b}{\sqrt{bb-aa}} = \lambda$, numerus rationalis, unde fit $\frac{b}{a} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda\lambda-1}}$, sicque erit

$$\frac{b-a}{b+a} = \frac{\lambda-\sqrt{\lambda\lambda-1}}{\lambda+\sqrt{\lambda\lambda-1}} = \frac{1}{(\lambda+\sqrt{\lambda\lambda-1})^2} \text{ ideoque } \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} = \frac{1}{\lambda+\sqrt{\lambda\lambda-1}},$$

quo valore substituto fiet

$$\Phi = 2n\,\text{A tag}\,u - 2n\lambda\,\text{A tag}\,\frac{u}{\lambda+\sqrt{\lambda\lambda-1}}.$$

§. 19. Componitur ergo angulus Φ ex duobus angulis quos vocemus ζ et η, quorumque ergo tangentes per u ita exprimuntur, ut sit $\text{tag}\,\zeta = u$ et $\text{tag}\,\eta = \frac{u}{\lambda+\sqrt{\lambda\lambda-1}}$, tum vero erit $\Phi = 2n\zeta - 2n\lambda\eta$ sive $\frac{\Phi}{2n} = \zeta - \lambda\eta$. Nunc evidens est si modo λ fuerit numerus rationalis etiam anguli $\lambda\eta$ tangentem algebraice per u exprimi; er-

go etiam tangens differentiae horum angulorum, hoc est anguli $\frac{\Phi}{2n}$, aequabitur functioni algebraicae ipsius u ideoque etiam tangens ipsius anguli Φ, si modo n fuerit numerus rationalis, unde patet hanc solutionem ad alias ellipses adaptari non posse.

§. 20. Cum igitur ellipsis quam consideremus eadem maneat quicunque valor ipsi b tribuatur, ad ejus indolem cognoscendam sumamus $b = 0$, ut sit $y = \frac{\sqrt{aa - xx}}{n}$, unde patet ejus semiaxem transversum fore $= a$, ubi scilicet $y = 0$, conjugatum vero $= \frac{a}{n}$. Quare noster calculus ad alias ellipses accommodari nequit, nisi quarum axes inter se teneant rationem rationalem. Praeterea vero pro b alios valores assumere non licet, nisi quibus fit $\frac{b}{\sqrt{bb - aa}}$ numerus rationalis. Unde patet, nihilominus semper innumeras curvas algebraicas inveniri posse quae cum tali ellipsi communem rectificationem contineant.

§. 21. Cum igitur pro curva quaesita sit $\frac{X}{Y} = \text{tag}\ \Phi$, etiam haec fractio $\frac{X}{Y}$ per functionem algebraicam ipsius u exprimetur. Deinde quia invenimus $\sqrt{X^2 + Y^2} = y = \frac{b + \sqrt{aa - xx}}{n}$, etiam haec chorda per functionem algebraicam ipsius u exprimetur, cum sit $x = \frac{2au}{1 + uu}$, et $\sqrt{aa - xx} = \frac{a(1 - uu)}{1 + uu}$, unde fit

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{b + a + (b - a)uu}{n(1 + uu)}.$$

Quamobrem cum ambae hae formulae: $\frac{X}{Y}$ et $\sqrt{X^2 + Y^2}$ per functiones algebraicas ejusdem quantitatis u determinentur, eliminando hanc quantitatem u, id quod facile fit ex valore ipsius $\sqrt{X^2 + Y^2}$, quippe quo posito $= Z$, colligitur $uu = \frac{b + a - nZ}{nZ - (b - a)}$. Hic igitur valor, in formula pro tag Φ inventa, cui $\frac{X}{Y}$ aequatur, substitutus, praebebit aequationem algebraicam inter binas coordinatas curvae

quaesitae X et Y, ob $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$, quae autem plerumque ad plurimas dimensiones exsurget.

§. 22. Hic probe notandum est, quoniam (vid. Nov. Act. T. V.) infinitas curvas algebraicas determinavi, quae cum data Ellipsi quacunque communi gaudeant rectificatione solo circulo excepto eas curvas ab iis quas nunc invenimus prorsus esse diversas; neque etiam patet quomodo illae ex solutione particulari qua hic usi sumus deduci queant. Facile autem derivari possunt ex formulis generalibus primae solutionis, id quod hic ostendisse operae pretium videtur.

§. 23. Quia ibi pro altera curva dedimus hos valores:

$$x = \frac{\partial P \sin\Phi + \partial Q \cos\Phi}{\partial \Phi} \text{ et } y = \frac{\partial Q \sin\Phi - \partial P \cos\Phi}{\partial \Phi}$$

sumamus $\frac{\partial P}{\partial \Phi} = - a \cos(n+1)\Phi + b \cos(n-1)\Phi$ et

$$\frac{\partial Q}{\partial \Phi} = a \sin(n+1)\Phi + b \sin(n-1)\Phi, \text{ eritque}$$

$$x = (a+b)\sin n\Phi \text{ et } y = (a-b)\cos n\Phi$$

unde manifesto fit $\frac{xx}{(a+b)^2} + \frac{yy}{(a-b)^2} = 1$, quae aequatio est pro ellipsi, cujus semiaxes sunt $a+b$ et $a-b$.

§. 24. Ex his autem valoribus differentialibus colligitur integrando:

$$P = - \frac{a \sin(n+1)\Phi}{n+1} + \frac{b \sin(n-1)\Phi}{n-1}$$

$$Q = - \frac{a \cos(n+1)\Phi}{n+1} - \frac{b \cos(n-1)\Phi}{n-1}.$$

Quare cum pro altera curva invenerimus:

$$X = \frac{\partial Q}{\partial \Phi} + P \text{ et } Y = \frac{\partial P}{\partial \Phi} - Q,$$

isti valores ita se habebunt:

$$X = \frac{na}{n+1}\sin(n+1)\Phi + \frac{nb}{n-1}\sin(n-1)\Phi$$

$$Y = - \frac{na}{n+1}\cos(n+1)\Phi + \frac{nb}{n-1}\cos(n-1)\Phi.$$

Unde patet, quoniam numerus n penitus arbitrio nostro relinquitur, ex his formulis infinitas prodire curvas algebraicas, nulla alia conditione restrictas, nisi ut n sit numerus rationalis, exceptis tantum duobus casibus $n = 1$ et $n = -1$, simul vero intelligitur, utcunque ratio inter axes fuerit irrationalis curvas quaesitas non turbari.

Problema.

Consensum inter ambas solutiones generales monstrare et substitutiones indagare, quibus altera in alteram converti queat.

Solutio.

§. 25. Quoniam in formulis supra datis tam coordinatas quam functiones inter se permutare licet, ad calculi commoditatem priores coordinatas x et y sequenti modo repraesentemus:

pro priore solutione	pro posteriore solutione
$x = \frac{\partial P \cos \Phi - \partial Q \sin \Phi}{\partial \Phi}$	$x = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{t \partial V}{\partial t} + V$
$y = \frac{\partial P \sin \Phi + \partial Q \cos \Phi}{\partial \Phi}$	$y = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{t \partial U}{\partial t} - U.$

Hic igitur ostendendum, qualem relationem primo inter Φ et t, deinde vero inter functiones p, q et V, U statui oporteat, ut isti duplices valores ipsarum x et y ad identitatem revocentur.

§. 26. Hunc in finem ante omnia necesse est multitudinem quantitatum quae hic occurrunt imminuere, id quod pulcherrime succedit, si pro priore solutione statuamus $P + Q\sqrt{-1} = \Theta$; tum enim fiet $x + y\sqrt{-1} = \frac{\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi}{\partial \Phi} \partial \Theta$. Pro altera vero solutione ponamus $U + V\sqrt{-1} = \Pi$, ac reperietur

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{\partial \Pi}{\partial t}(1 + t\sqrt{-1}) - \Pi\sqrt{-1}.$$

Haec autem expressio ad hanc formam redigitur:

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{(1 + t\sqrt{-1})^2}{\partial t} \partial . \frac{\Pi}{1 + t\sqrt{-1}}.$$

Totum negotium ergo huc redit, ut hae duae formulae pro $x+y\sqrt{-1}$ inventae consentientes reddantur.

§. 27. Quo factores priores ad majorem uniformitatem revocemus ponamus $t = \operatorname{tag}\omega$ eritque $1 + t\sqrt{-1} = \frac{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega}{\cos\omega}$ et $\partial t = \frac{\partial\omega}{\cos\omega^2}$ unde fit $\frac{(1+t\sqrt{-1})^2}{\partial t} = \frac{\cos 2\omega + \sqrt{-1}\sin 2\omega}{\partial\omega}$. Quamobrem nunc ista aequalitas erit docenda:

$$\frac{\cos\Phi + \sqrt{-1}\sin\Phi}{\partial\Phi}\cdot\partial\Theta = \frac{\cos 2\omega + \sqrt{-1}\sin 2\omega}{\partial\omega}\,\partial\cdot\frac{\Pi\cos\omega}{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega}$$

et nunc evidens est statui debere $\Phi = 2\omega$; tum enim dividendo utrinque per $\frac{\cos 2\omega + \sqrt{-1}\sin 2\omega}{\partial\omega}$ orietur ista aequalitas satis simplex:

$$\tfrac{1}{2}\partial\Theta = \partial\frac{\Pi\cos\omega}{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega}.$$

Integralibus igitur sumendis debet esse $\Theta = \frac{2\Pi\cos\omega}{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega}$ sive

$$\Theta(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega) = 2\,\Pi\cos\omega.$$

§. 28. Restituamus nunc loco Θ et Π valores assumtos orieturque haec aequatio:

$$(P + Q\sqrt{-1})(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega) = 2\cos\omega(U + V\sqrt{-1})$$

unde partes reales et imaginarias seorsim inter se aequari oportet, hincque ergo duae sequentes determinationes deducuntur:

$$2\,U\cos\omega = P\cos\omega - Q\sin\omega$$
$$2\,V\cos\omega = P\sin\omega + Q\cos\omega$$

ubi meminisse oportet esse $t = \operatorname{tag}\omega$ et $\Phi = 2\omega$ sicque si in solutione posteriore loco U et V isti valores substituantur:

$$U = \frac{P\cos\omega - Q\sin\omega}{2\cos\omega} \text{ et } V = \frac{P\sin\omega + Q\cos\omega}{2\cos\omega},$$

ea in priorem convertetur.

§. 29. Vicissim igitur functiones P et Q per U et V ita definientur, $P = 2\,U\cos\omega^2 + 2\,V\sin\omega\cos\omega$ sive

$$P = U(1 + \cos 2\omega) + V\sin 2\omega$$
$$\text{et } Q = V(1 + \cos 2\omega) - U\sin 2\omega.$$

Hoc igitur modo patet non solum binas expressiones perfecte inter se consentire, sed etiam substitutiones habentur, quibus altera in alteram converti potest.

§. 30. Ostendamus igitur clarius quomodo posteriores formulae ad priores reduci debeant. Ac primo quidem cum sit:

$$t = \text{tag}\, \omega = \text{tag}\, \tfrac{1}{2} \Phi, \text{ erit } t = \frac{\sin \Phi}{1 + \cos \Phi} \text{ et } \partial t = \frac{\partial \Phi}{1 + \cos \Phi};$$

tum vero erit etiam:

$$U = \frac{P}{2} - \frac{Q \sin \Phi}{2(1 + \cos \Phi)} \text{ et } V = \frac{Q}{2} + \frac{P \sin \Phi}{2(1 + \cos \Phi)}.$$

Simili modo priores ex posterioribus nascentur; namque ob

$$\text{tag}\, \tfrac{1}{2} \Phi = t \text{ erit } \sin \Phi = \frac{2t}{1 + tt} \text{ et } \cos \Phi = \frac{1 - tt}{1 + tt}$$

tum vero $\partial \Phi = \frac{2 \partial t}{1 + tt}$, functiones vero P et Q ita definientur ut sit

$$P = \frac{2U + 2Vt}{1 + tt} \text{ et } Q = \frac{2V - 2Ut}{1 + tt}.$$

§. 31. Sufficiet autem consensum inter formulas binas pro coordinatis x et y ostendisse quandoquidem nullum dubium superesse potest quin per has substitutiones etiam formulae pro coordinatis X et Y alterae in alteras convertantur, atque hoc modo quaestioni principali quam hic tractare suscepimus perfecte est satisfactum, dum nostrae formulae omnia binarum curvarum algebraicarum paria largiuntur, quae eadem rectificatione sint praeditae.

XII.

DE
CURVIS ALGEBRAICIS
QUARUM OMNES ARCUS PER ARCUS CIRCULARES METIRI LICEAT.

Conventui exhibita die 20. Aug. 1781.

§. 1. Non dubitavi ante aliquot annos istam propositionem tanquam insigne theorema in medium proferre: quod praeter circulum nulla detur curva algebraica, cujus arcubus omnibus aequales arcus circulares assignari queant. Plures etiam adduxi rationes satis probabiles, quae me iu hac opinione confirmabant, quanquam probe perspexi eas a perfecta demonstratione adhuc plurimum distare. Praecipua autem ratio mihi erat, quod, postquam in hoc argumento plurimum elaborassem, nullam tamen hujusmodi curvam elicere potuerim.

§. 2. Quamobrem, cum nuper in simili argumento occupatus in genere binas curvas algebraicas investigassem, quae communi rectificatione gauderent, indeque infinitas curvas algebraicas investigassem, quarum longitudo per arcus parabolicos metiri liceret, tum vero etiam infinitas curvas algebraicas, cum Ellipsi eadem rectificatione gaudentes, maxime obstupui, quod, etiamsi ellipsin in circulum converterem, nihilominus curvae inventae a circulo essent diversae. Sententiam igitur meam hic solenniter retractans methodum facilem exponam cujus ope innumerabiles curvae algebraicae inveniri possunt, quarum omnes arcus circularibus sunt aequales.



§. 3. Proposito igitur circulo centro c, radio ca descripto, concipiamus curvam AZ ita comparatam ut ejus arcus indefinitus AZ semper aequalis sit arcui indefinito illius circuli az, quo vocato $az = \omega$ sit quoque arcus $AZ = \omega$. Hanc jam curvam ad centrum quoddam fixum C refero, ejusque naturam per aequationem inter distantiam $CZ = z$ et angulum $ACZ = \Phi$ investigabo, ut quaesito satisfiat. Cum igitur hinc sit arcus $AZ = \int \sqrt{\partial z^2 + zz\partial\Phi^2}$ fieri debet $\partial\omega^2 = \partial z^2 + zz\partial\Phi^2$, unde deducitur $\partial\Phi = \frac{\sqrt{\partial\omega - \partial z^2}}{z}$, ubi ergo totum negotium huc redit ut ejusmodi relatio inter z et ω exquiratur, quae integrale hujus formulae $\Phi = \int \frac{\sqrt{\partial\omega^2 - \partial z^2}}{z}$ per arcum circularem simpliciter exprimat. Fig. 2. 3.

§. 4. Observavi autem hoc satis commode praestari posse si statuamus distantiam $CZ = b + \cos\omega$, quem in finem sumo intervallum $cb = b$, ac demisso ex z perpendiculo zp fiet $cp = \cos\omega$, sicque distantia CZ semper aequalis capi debet intervallo bp. Unde patet pro initio A nostrae curvae fore distantiam $CA = ba = b + 1$. Cum igitur hinc fiat $\partial z = -\partial\omega \sin\omega$ formula differentialis pro $\partial\Phi$ data, posito $z = b + \cos\omega$, induet hanc formam satis concinnam $\partial\Phi = \frac{\partial\omega \cos\omega}{b + \cos\omega}$ cujus ergo integrale arcui circulari aequale esse debet.

§. 5. Ista autem formula sponte in has partes discerpitur: $\partial\Phi = \partial\omega - \frac{b\partial\omega}{b + \cos\omega}$, quarum prima per se est elementum circuli. Pro altera parte ponamus $\operatorname{tag} \frac{1}{2}\omega = t$, fietque $\partial\omega = \frac{2\partial t}{1 + tt}$; tum vero fit $\sin\frac{1}{2}\omega = \frac{t}{\sqrt{1 + tt}}$ et $\cos\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + tt}}$, unde colligitur:

$$\cos\omega = \cos\tfrac{1}{2}\omega^2 - \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 = \frac{1 - tt}{1 + tt}.$$

Erit ergo $b + \cos\omega = \frac{b + 1 + (b - 1)tt}{1 + tt}$, sicque erit $\frac{b\partial\omega}{b + \cos\omega} = \frac{2b\partial t}{(b + 1) + (b - 1)tt}$ cujus integratio semper ad arcum circularem reducitur dummodo fuerit $b > 1$.

§. 6. Ad hoc integrale inveniendum notetur esse in genere

$$\int \frac{\partial t}{f + gtt} = \frac{1}{\sqrt{fg}} \text{A tag} \frac{t\sqrt{g}}{\sqrt{f}},$$

unde pro nostro casu erit angulus $\Phi = \omega - \frac{2b}{\sqrt{bb-1}} \text{A tag}\, t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}}$. At vero ut horum angulorum differentia geometrice assignari queat necesse est ut coëfficiens $\frac{2b}{\sqrt{bb-1}}$ sit numerus rationalis; atque adeo jam evidens est, quoties hoc contigerit, semper prodituram esse curvam algebraicam AZ cum circulo proposito arcus aequales habentem.

§. 7. Cum sit $z = b + \cos\omega$ plures egregiae proprietates hujus curvae se offerunt, quas probe notari conveniet; namque si ad Z ducatur tangens ZT et vocetur angulus $CZT = \psi$, erit $\sin\psi = \frac{z\partial\Phi}{\partial\omega}$; ergo, ob $\partial\Phi = \frac{\partial\omega\cos\omega}{b+\cos\omega}$ erit $\sin\psi = \cos\omega$, ita ut angulus CZT semper aequetur $90^\circ - \omega$, ideoque, ob $AZ = \omega$ semper erit $\psi = \frac{\pi}{2} - \omega$, denotante $\frac{\pi}{2}$ angulum rectum. Hinc si ex C in tangentem demittatur perpendiculum CT, erit

$$CT = z\sin\psi = z\cos\omega = (b + \cos\omega)\cos\omega.$$

Posito autem hoc perpendiculo $CT = p$, constat semper esse radium osculi curvae $= \frac{z\partial z}{\partial p}$. Cum igitur sit

$$z\partial z = -\partial\omega\sin\omega\,(b+\cos\omega) \text{ et } \partial p = -\partial\omega\sin\omega\,(b+2\cos\omega),$$

erit radius osculi curvae in Z, quem vocemus $r = \frac{b+\cos\omega}{b+2\cos\omega}$ qui ergo in initio, ubi $\omega = 0$ erit $r = \frac{b+1}{b+2}$, ideoque minor quam in circulo. At vero pro arcu $\omega = \frac{\pi}{2}$ erit $r = 1$, ideoque radio circuli aequalis. Sumto autem $\omega = \pi$ erit $r = \frac{b-1}{b-2}$. Unde patet, nisi sit $b > 2$ hunc radium osculi fieri negativum, sive in plagam contrariam vergere, ideoque interea curvam punctum flexus contrarii esse passam, quod eveniet, ubi $\cos\omega = -\frac{b}{2}$, quod ergo $\omega = 90^\circ$ et $\omega = 180^\circ$ cadet. Hocque loco radius osculi erit infinite magnum. Praeterea cum sit $\partial\Phi = \frac{\partial\omega\cos\omega}{b+\cos\omega}$, manifestum est cur-

vam supra axem ascendere, sive angulum $ACZ = \Phi$ augeri ab $\omega = 0$ ad $\omega = 90^\circ$ hinc autem istum angulum iterum decrescere atque adeo curvam axem AC secare antequam fiat $\omega = 180^\circ$ quia tum angulus Φ fiet negativus. Quia enim posito $\omega = 180^\circ$ fit $t = \infty$ ideoque $A \tan t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} = 90^\circ$, ideoque

$$\Phi = \omega = 180^\circ \left(1 - \frac{b}{\sqrt{bb-1}}\right), \text{ ubi } \frac{b}{\sqrt{bb-1}} > 1.$$

§. 8. Ex radio osculi invento $r = \frac{b + \cos\omega}{b + 2\cos\omega}$ etiam commode assignari potest amplitudo curvae $AZ = \omega$. Si enim amplitudo ponatur ϑ, erit $\partial\vartheta = \frac{\partial\omega}{r} = \frac{\partial\omega (b + 2\cos\omega)}{b + \cos\omega}$, hoc est erit

$$\partial\vartheta = \partial\omega + \frac{\partial\omega \cos\omega}{b + \cos\omega} = \partial\omega + \partial\Phi,$$

sicque amplitudo ϑ semper aequatur summae angulorum ω et Φ, quamdiu scilicet angulus Φ supra axem cadit. Si enim infra axem cadat negative accipi debet. Cum autem amplitudo curvae continuo augeatur quamdiu curva AZ versus eandem partem est concava. Postquam autem coepit in partem contrariam vergere, quod evenit, ubi punctum flexus contrarii datur (jam notavimus tale punctum occurrere ubi $b + 2\cos\omega = 0$, seu, ubi $\cos\omega = -\frac{b}{2}$) tum, cum sit $z = b + \cos\omega$, fiet $z = \frac{1}{2}b$ ita ut punctum flexus contrarii semper incidat in distantiam $CZ = \frac{1}{2}b$; unde colligimus, curvam ab initio A, ubi $Z = b + 1$ concavitatem axi obvertere donec fiat distantia $z = \frac{1}{2}b$, et quamdiu distantia minor fuerit quam $\frac{1}{2}b$, concavitatem in partem contrariam vergi, id quod evenire nequit, nisi fuerit $b < 2$, quia $b - 1$ minima distantia curvae a centro C, quamobrem si fuerit $b > 2$ tota curva nusquam habebit punctum flexus contrarii.

§. 9. Cum autem nostrae curvae algebraicae fieri nequeant, nisi haec formula $\frac{b}{\sqrt{bb-1}}$ aequetur numero rationali, quem ponamus n, hinc vicissim colligitur $b = \frac{n}{\sqrt{nn-1}}$. Tum igitur erit angulus ACZ

$$= \Phi = \omega - 2n \text{A tag} t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}},$$

ubi est $t = \text{tag} \frac{1}{2} \omega$. Hic igitur erit:

$$\frac{b-1}{b+1} = \frac{n - \sqrt{nn-1}}{n + \sqrt{nn-1}} = \frac{1}{(n+\sqrt{nn-1})^2}$$

sicque erit $t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} = \frac{t}{n+\sqrt{nn-1}}$. Quia igitur necessario sumi debet $n > 1$ manifestum est istam tangentem $t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}}$ semper minorem esse quam t. Ponamus ergo brevitatis gratia $t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} = u$, et vocemus angulum cujus tangens est $u = \theta$, habebimus hanc formulam $\Phi = \omega - 2n\theta$, unde deducitur sequens

Constructio geometrica curvarum quaesitarum.

§. 10. Monstrabimus igitur, quomodo pro quovis circuli puncto z punctum ei respondens Z in qualibet curva quaesita definiri queat. Sumto nimirum pro n numero quocunque rationali unitate majore, capiatur $b = \frac{n}{\sqrt{nn-1}} = cb$; tum vero ex arcu $az = \omega$ habebitur $t = \text{tag} \frac{1}{2} \omega$, hincque etiam innotescet

$$u = t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} = \frac{t}{(n+\sqrt{nn-1})^2}.$$

Nunc abscindatur in circulo arcus cujus tangens est u qui ponatur $= \theta$ et quia n est numerus rationalis geometrice assignabitur $= 2n\theta$, quo facto construatur angulus ACZ aequalis differentiae angulorum ω et $2n\theta$, ut scilicet fiat $\Phi = \omega - 2n\theta$ quo facto sumatur distantia CZ $= b + \cos \omega = bp$ hocque modo pro singulis circuli punctis z determinabuntur puncta correspondentia Z curvae quaesitae.

§. 11. Hinc patet, quando arcus $az = \omega$ evanescit, tum punctum Z incidere in ipsum punctum A existente CA $= ba$. At vero sumto arcu $az = 180^\circ = \pi$, quia tum fit $t = \text{tag} \frac{1}{2} \pi = \infty$, erit etiam $u = \infty$, unde $\theta = 90^\circ$. Pro hoc ergo casu fiet angulus $\Phi = 180^\circ - 2n \cdot 90^\circ = \pi(1-n)$. Quare cum semper sit $n > 1$, angulus Φ ad alteram axis partem cadet, eritque hic an-

gulus $= \pi (n - 1)$. Distantia vero puncti respondentis a centro C erit $b - 1$, quae est minima distantia ad quam nostra curva versus centrum accedere potest. Sufficiet autem hoc modo tractum curvae tantum a distantia maxima $b + 1$, usque ad minimam $b - 1$ descripsisse propterea quod ultra hos terminos curva utrinque aequaliter porrigitur, unde intelligitur, tam distantiam maximam, quam minimam fore curvae diametros. Denique etiam ultro patet, longitudinem curvae a distantia ad sequentem minimam semiperipheriae circuli propositi aequari. Et quia angulus inter maximam et minimam distantiam qui est $(n - 1)\pi$ cum peripheria circuli est commensurabilis sequitur numerum diametrorum semper esse debere finitum.

§. 12. Hinc etiam intelligitur quomodo aequationem inter coordinatas $CP = x$ et $PZ = y$ erui oporteat. Cum enim sit $\tang \Phi = \frac{y}{x}$ et $\tang \frac{1}{2}\Phi = \sqrt{\frac{z - x}{z + x}}$, cui aequari debet $\tang (\frac{1}{2}\omega - n\theta)$. Quia vero posuimus $\tang \frac{1}{2}\omega = t$, erit $\cos\omega = \frac{1 - tt}{1 + tt}$, unde ob $z = b + \frac{1 - tt}{1 + tt}$ elicitur $tt = \frac{b + 1 - z}{z - b + 1}$ hincque $uu = \frac{b - 1}{b + 1} tt = \frac{bb - 1 - (b - 1)z}{(b + 1)z - bb + 1}$, sicque t et ω per functiones ipsius z, ideoque etiam $\tang n\theta$ per talem functionem exprimetur, unde etiam tangens anguli $\frac{1}{2}\omega - n\theta$ per functionem solius z definietur. Hinc sumtis quadratis formula $\frac{z - x}{z + x}$ aequatur functioni rationali ipsius z, quae aequatio denique ob $z = \sqrt{xx + yy}$ sumendis quadratis ad aequationem rationalem inter x et y reducitur, quae autem plerumque ad plurimas dimensiones assurgit, siquidem pro casu simplicissimo quo $n = 2$ ad sextum ordinem ascendit.

Descriptio curvae simplicissimae quo $n = 2$.

§. 13. Hic ergo ob $n = 2$ erit $b = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec 30^\circ$ ideoque proxime $b = 1{,}1547$. Maxima igitur curvae distantia a centro C, Fig. 4.

seu quasi apsis summa erit $CA = b + 1 = 2,1547$ ad quam curva est normalis, ibique radius osculi erit $r = \frac{b+1}{b+2} = 0,6830$. Minima distantia erit $b - 1 = 0,1547$ quae a maxima distabit angulo $= 180°$, ideoque in axem AC continuatum cadet, quae sit CI, ubi curva iterum ad axem erit normalis. At vero radius osculi in I erit $\frac{b-1}{b-2} = -0,1830$. Longitudo autem curvae ab abside summa A ad imam I protensae aequabitur semiperipheriae circuli radio 1 descripti.

§. 14. Pro aliis curvae punctis memorabilibus definiendis sumto arcu $AZ = \omega$ erit distantia $CZ = b + \cos\omega$. Pro angulo autem $ACZ = \Phi$ habebimus $\tan \frac{1}{2}\Phi = \tan(\frac{1}{2}\omega - 2\theta)$, ubi posito $\tan \frac{1}{2}\omega = t$ erit $\tan \theta = u = t\sqrt{\frac{b-1}{b+1}} = 0,2679\, t$, et vicissim $t = u\sqrt{\frac{b+1}{b-1}} = 3,7321 \,.\, u$. Cum igitur sit $\tan \theta = u$ erit $\tan 2\theta = \frac{2u}{1-uu}$, unde fit $\tan(\frac{1}{2}\omega - 2\theta) = \frac{t(1-uu)-2u}{1-uu+2tu} = \tan\frac{1}{2}\Phi$.

§. 15. Sumamus nunc arcum $AE = 90° = \frac{1}{2}\pi$ eritque distantia $CE = b$ et angulus $\psi = 90° - \omega = 0$ unde patet rectam CE curvam E tangere, ibique radium osculi fore $= 1$. Pro angulo ACE investigando habemus $t = 1$ et $u = 0,2679 = \tan\theta$. Erit ergo angulus $\theta = 15°, 0'$, ideoque $\frac{1}{2}\Phi = 15°, 0'$, hocque modo erit angulus $ACE = 30°$.

§. 16. Hinc igitur curva ad axem appropinquabit eumque mox secabit in F, ubi ergo, cum fiat $\Phi = 0$ erit $t(1-uu) = 2u$ sive $3,7321\,(1-uu) = 2$, unde reperitur $uu = 0,4641$, hincque $t = 2,7321$. Erit ergo $\frac{1}{2}\omega = 69°, 54'$, ideoque $\omega = 139°, 48'$. Unde patet curvam hic ad axem sub angulo $49°, 48'$, esse inclinatam, distantiam vero fore $CF = b - \sin(49°, 48') = 0,3909$. Radius osculi hoc loco erit $= -1,0483$. Hic ergo curva jam in contrariam partem est inflexa ideoque punctum flexus contrarii praecessit punctum F.

§. 17. Ad hoc ergo punctum, quod sit in G inveniendum jam supra notavimus id incidere ubi distantia $CG = \frac{1}{2}b = 0,5773$, ita ut $\cos\omega = -\frac{1}{2}b$ ideoque $\omega = 125^\circ, 16'$. Quare hoc loco curva ad rectam CG inclinatur sub angulo $35^\circ, 16'$. Quia porro est $\frac{1}{2}\omega = 62^\circ, 38'$, erit $t = 1, 9319$, hincque porro $u = 0, 5176$, quae est tangens anguli θ qui consequenter erit $27^\circ, 22'$ ergo $\frac{1}{2}\Phi = 7^\circ, 54'$, consequenter angulus $FCG = 15^\circ, 48'$. Ex his autem principalibus curvae punctis tractus curvae facile satis exacte describi poterit, unde cum recta AI simul curvae sit diameter tota curva habet hanc figuram.

Supplementum.

§. 18. Solutio sequentis problematis non parum elegantis omnes curvas methodo praecedente inventas multo facilius et commodius largietur.

Problema.

Invenire curvam EZ ad punctum fixum C relatam, cujus quilibet arcus EZ ad angulum EZC ubique eandem teneat rationem. Fig. 5.

Solutio.

§. 19. Hic igitur statim patet, arcum curvae EZ, quia angulo EZC est proportionalis aequalem fore arcui circulari eundem angulum metientis, ideoque si hae curvae fuerint algebraicae eas scopo nostro esse satisfacturas. Ad eas inveniendas ponamus angulum $ECZ = \Phi$ et distantiam $CZ = z$ ut habeamus pro situ proximo $ZS = z\partial\Phi$ et $zS = \partial z$. Ponamus nunc angulum $EZC = \omega$, arcum vero $EZ = a\omega$ et quia omnes curvae similes ad idem punctum C relatae aeque satisfaciunt sumere licebit $a = 1$, ut sit arcus $EZ = \omega$, ejusque ergo elementum $Zz = \partial\omega$ et nunc triangulum ZzS statim praebet has duas aequationes:

$$\partial z = \partial\omega \cos\omega \quad \text{et} \quad z\partial\Phi = \partial\omega \sin\omega.$$

§. 20. Prior harum aequationum integrata statim dat $z = b + \sin\omega$, unde ex altera fit $\partial\Phi = \frac{\partial\omega \sin\omega}{b+\sin\omega}$. Hinc statim manifestum est, in puncto E, ubi arcus EZ evanescit fore etiam angulum $\omega = 0$, ideoque distantiam CE $= b$, et hanc rectam CE fore curvae tangentem in ipso initio E.

§. 21. Pro elemento ergo angulari $\partial\Phi$ habemus

$$\partial\Phi = \partial\omega - \frac{b\partial\omega}{b+\sin\omega}, \text{ ideoque } \Phi = \omega - \int \frac{b\partial\omega}{b+\sin\omega},$$

ad quam formulam integrandam ponamus $\operatorname{tag}\frac{1}{2}\omega = t$ unde fit

$$\sin\omega = \frac{2t}{1+tt} \text{ et } \partial\omega = \frac{2\partial t}{1+tt},$$

unde oritur formula $\frac{b\partial\omega}{b+\sin\omega} = \frac{2b\partial t}{b(1+tt)+2t}$. Ponamus $\frac{1}{b} = \cos\beta$ ut oriatur $\frac{b\partial\omega}{b+\sin\omega} = \frac{2\partial t}{1+tt+2t\cos\beta}$, cujus formulae integrale semper exprimet arcum circuli, si modo fuerit $b > 1$ et $\frac{1}{b}$ per cosinum cujuspiam anguli referri queat. Constat autem hujus formulae integrale fore $= \frac{2}{\sin\beta} \operatorname{A tag} \frac{t\sin\beta}{1+t\cos\beta}$, ita ut jam nacti simus hanc aequationem: $\Phi = \omega - \frac{2}{\sin\beta} \operatorname{A tag} \frac{t\sin\beta}{1+t\cos\beta}$; unde patet, quoties $\sin\beta$ fuerit numerus rationalis, istum angulum semper geometrice assignari posse, ideoque curvam nostram fore algebraicam, et quia angulum β infinitis modis accipere licet, simul reperiri innumerabiles curvas algebraicas scopo nostro satisfacientes, quippe quarum omnes arcus per arcus circulares mensurantur. Evidens autem est has curvas cum iis quas ante invenimus perfecte convenire, quia hic tantum aliud principium est assumtum in E.

§. 22. Quoniam igitur $\sin\beta$ debet esse numerus rationalis, ponamus $\frac{1}{\sin\beta} = n$, ita ut n sit numerus quicunque unitate major sive integer sive fractus, ac posito br. gratia:

$$\operatorname{A tag} \frac{t\sin\beta}{1+t\cos\beta} = \theta \text{ erit } \Phi = \omega - 2n\theta,$$

qui ergo angulus in principio, ubi $\omega = 0$, etiam evanescit. Erit

igitur $\frac{1}{2}\Phi = \frac{1}{2}\omega - n\theta$, ac positis coordinatis orthogonalibus $CP = x$ et $PZ = y$ erit $\tang \Phi = \frac{y}{x}$ et $\tang \frac{1}{2}\Phi = \frac{y}{z+x} = \sqrt{\frac{z-x}{z+x}}$. Cum porro sit $z = b + \sin\omega = b + \frac{2t}{1+tt}$, patet etiam t aequari functioni ipsius z, hincque etiam $\tang\theta$, ita ut hinc pro quovis casu aequatio inter coordinatas orthogonales x et y erui queat.

§. 23. Investigemus nunc praecipua puncta hujus curvae, ac primo quidem capiamus arcum $EA = 90° = \frac{\pi}{2}$, eritque angulus ω rectus et distantia CA ad curvam erit normalis, simulque erit curvae diameter, circa quam curva utrinque pari tractu protenditur. Hic igitur erit $\tang \frac{1}{2}\omega = t = 1$, ideoque $\tang\theta = \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} = \tang \frac{1}{2}\beta$, ita ut $\theta = \frac{1}{2}\beta$, unde invento hoc angulo β, cujus cosinus est $\frac{1}{b}$ erit angulus $ECA = \frac{\pi}{2} - n\beta$. Ipsa autem distantia CA erit $b+1$, quae erit maxima, ad quam curva pertingere potest.

§. 24. Consideremus nunc portionem hujus curvae a puncto E retro protensam, ac sumamus arcum EI quandranti aequalem, unde statui oportebit $\omega = -\frac{\pi}{2}$ atque in hoc puncto I erit distantia $CI = b - 1$, quae est omnium minima ad quam curva descendere potest, hicque iterum erit CI ad curvam normalis, pariterque ejus diameter, unde sufficiet curvam tantum ab A per E usque ad I descripsisse.

§. 25. Hoc igitur casu ob $t = -1$, erit $\theta = A\tang \frac{-\sin\beta}{1-\cos\beta}$, sicque iste angulus θ erit negativus, ejusque tangens $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$, quae expressio est cotangens anguli $\frac{1}{2}\beta$, sicque erit $-\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\beta$, unde prodit angulus $ECI = \Phi = -\frac{\pi}{2} + 2n(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\beta) = (n-\frac{1}{2})\pi - n\beta$, quamobrem angulus inter distantiam maximam $CA = b + 1$ et minimam $CI = b - 1$ interceptus erit $ACI = (n-1)\pi$, prorsus uti supra est inventus.

§. 26. Consideremus denique casum quo arcus EZ semiperipheriae aequalis accipitur sive $\omega = \pi$, ubi ergo distantia curvam iterum tanget; tum igitur erit $t = \infty$ et $\tan\theta = \tan\beta$ ideoque $\theta = \beta$, sicque erit angulus $\Phi = \pi - 2n\beta$, qui est duplo major quam angulus ECA, prorsus ut indoles diametri postulat. Ceterum hic notasse juvabit, omnes formulas hic inventas ad praecedentes reduci posse, si loco t scribatur $\frac{1-t}{1+t}$, simulque angulus Φ minuatur angulo $ECA = \frac{\pi}{2} - n\beta$.

XIII.

SOLUTIO PROBLEMATIS ANALYTICI DIFFICILLIMI.

Conventui exhibita die 19. Aug. 1782.

§. 1. Si p, q et P, Q denotent functiones homogeneas nullius dimensionis binarum variabilium x et y datas et proposita fuerit haec formula differentialis $\partial v = \frac{p \partial x + \Pi q \partial y}{\Pi P + Q} x^{n-1}$, in quam ingreditur functio indeterminata Π, quam ita determinari oportet, ut integratio succedat. Hujusmodi formulae mihi se obtulerunt cum nuper problema de trajectoriis orthogonalibus ad superficies translatum perscrutarer atque evidens est, hanc quaestionem maxime esse arduam, et summam sagacitatem in evolvendis functionibus duarum variabilium requirere, in quo negotio geometrae nunc quidem plurimum sunt occupati.

§. 2. Quod si igitur statuamus $y = tx$ erunt litterae p, q, P, Q functiones datae ipsius $t = \frac{y}{x}$, et quia potestas indefinita ipsius x est adjuncta, haec formula omnes complectitur casus quibus tam numerator quam denominator sunt functiones homogeneae ipsarum x et y. Positione igitur $y = tx$ tota formula ad has duas variabiles x et t reducitur. Quemadmodum igitur functio illa indefinita Π determinari debeat hic nunc accuratius investigemus.

§. 3. Ac primo quidem statuamus $\Pi = \frac{\Theta Q + \Delta}{1 - \Theta P}$ ubi scilicet binas novas functiones incognitas Δ et Θ introducimus et facta hac

substitutione formula nostra in sequentes duas partes discerpetur:

$$\partial v = \frac{p\partial x + \Delta q \partial y}{\Delta P + Q} x^{n-1} + \frac{\Theta(Qq\partial y - Pp\partial x)}{\Delta P + Q} x^{n-1},$$

quarum priorem brevitatis gratia per ∂u, posteriorem vero per ∂w designabo, atque binas litteras Δ et Θ, ita definire conabor, ut utraque pars integrationem admittat.

§. 4. Nunc loco ∂y scribamus ejus valorem $t\partial x + x\partial t$ atque pars prior induet hanc formam:

$$\partial u = \frac{x^{n-1}\partial x(p + \Delta qt)}{\Delta P + Q} + \frac{x^n \Delta qt}{\Delta P + Q},$$

quae quo facilius tractari possit statuatur $\frac{p + \Delta qt}{\Delta P + Q} = \Sigma$ unde fit $\Delta = \frac{\Sigma Q - p}{qt - \Sigma P}$ et pro altero membro fit $\frac{\Delta q}{\Delta P + Q} = \frac{\Sigma Qq - pq}{Qqt - Pp}$, sicque habebitur $\partial u = \Sigma x^{n-1}\partial x + \frac{x^n q\partial t(\Sigma Q - p)}{Qqt - Pp}$. Quamobrem, si Σ tantum involvat variabilem t integrale aliam formam habere nequit nisi hanc: $u = \frac{1}{n}\Sigma x^n$; tum autem esse debet $\partial\Sigma = \frac{nq\partial t(\Sigma Q - p)}{Qqt - Pp}$, cujus aequationis resolutio, quia Σ non ultra unam dimensionem ascendit, est facilis.

§. 5. Quo autem integrale commodius exprimatur ponamus $\frac{Qq\partial t}{Qqt - Pp} = \frac{\partial s}{s}$, hincque integrale erit $\frac{\Sigma}{s^n} = -n\int\frac{pq\partial t}{s^n(Qqt - Pp)}$. Ergo quia ex praecedente positione est

$$\frac{q\partial t}{Qqt - Pp} = \frac{\partial s}{Qs} \text{ erit } \Sigma = -ns^n\int\frac{p\partial s}{Qs^{n+1}},$$

quam integrationem ut concessam assumamus et statuamus $\int\frac{p\partial s}{Qs^{n+1}} = T$, ita ut sit $\Sigma = -ns^n T$, hocque modo adepti sumus integrale prioris partis $u = -x^n s^n T$, qui valor ergo etiam praebet valorem quaesitum v, pro casu quo $\Theta = 0$.

§. 6. Eodem modo evolvamus alteram partem unde loco ∂y scripto valore $t\partial x + x\partial t$ prodit:

$$\partial w = \frac{\Theta x^{n-1}\partial x(Qqt - Pp) + \Theta x^n Qq\partial t}{(Qqt - Pp):(qt - \Sigma P)}$$

postquam scilicet loco Δ valorem ante inventum substituimus, qui

erat $\Delta = \frac{\Sigma Q - p}{qt - \Sigma P}$. Hic igitur loco $\Theta(qt - \Sigma P)$ scribamus Φ, ut habeamus:

$$\partial w = \Phi \left(x^{n-1} \partial x + \frac{x^n \partial s}{s}\right) = \Phi \frac{x^{n-1}}{s} (s \partial x + x \partial s).$$

Unde patet, integrale w fore functionem quancunque ipsius sx, quam ita repraesentemus: $w = \Phi : xs$ sive, ponendo $xs = z$, si Z functionem quancunque ipsius z denotet, habebitur $w = Z$; inde autem si ponatur $\partial Z = Z' \partial z$, erit $\Phi = \frac{Z' s}{x^{n-1}}$.

§. 7. Inventa igitur utraque parte u et w, erit integrale quaesitum nostrae formulae $v = -Tz^n + Z$ qui valor praeter omnem expectationem tam simplex est inventus atque adeo facile ex ipsa formula proposita formari poterit, cum sit $\frac{\partial s}{s} = \frac{Qq\partial t}{Qqt - Pp}$ et $T = \int \frac{p \partial s}{Qs^{n+1}}$ hicque est valor generalissimus pro formula nostra proposita, siquidem loco Π successive valores hic assignati accipiantur, in quo negotio cum quaestio nostra potissimum versetur, operae pretium erit istum valorem evolvere.

§. 8. Cum igitur primo posuerimus $\Pi = \frac{\Theta Q + \Delta}{1 - \Theta P}$ deinde vero esset $\Delta = \frac{\Sigma Q - p}{qt - \Sigma P}$ et $\Theta = \frac{\Phi}{qt - \Sigma p}$ fiet $\pi = -\frac{p + (\Phi + \Sigma) Q}{qt - (\Phi + \Sigma) P}$. Cum igitur sit $\Sigma = -ns^n T$ et $\Phi = \frac{z' s}{x^{n-1}}$, hincque pro quovis casu oblato valor debitus ipsi Π facile assignari potest.

Alia solutio multo concinnior.

§. 9. Hic statim sine ulla praeparatione ipsa formula proposita, elidendo ∂y dat $\frac{x^{n-1} \partial x (p + \Pi qt) + x^n \Pi q \partial t}{\Pi P + Q} = \partial v$. Ponatur nunc $\frac{p + \Pi qt}{\Pi P + Q} = \Theta$, ut sit $\Pi = \frac{\Theta Q - p}{qt - \Theta P}$, hincque porro $\frac{\Pi}{\Pi P + Q} = \frac{\Theta Q - p}{Qqt - Pp}$, unde fit $\partial v = \frac{\Theta x^{n-1} \partial x + x^n q \partial t (\Theta Q - p)}{Qqt - Pp}$.

§. 10. Ponamus nunc ut supra $\frac{Qq\partial t}{Qqt - Pp} = \frac{\partial s}{s}$, hocque modo fit $\partial v = \Theta x^{n-1} \partial x + \frac{x^n \partial s}{Qs} (\Theta Q - p)$. Hinc autem facile

conditio integrabilitatis obtineretur, verum nulla functio arbitraria praeterea in integrale introduceretur quemadmodum solutio completa postulat. At vero singulari artificio etiam hinc integrale completum erui potest, ponendo $\Theta = M + N$. Etiamsi enim haec positio nihil plane polliceri videatur, tamen ea totum negotium absolvetur. Hoc enim modo nostra formula distinguetur in duas partes quarum utramque seorsim tractare licebit. Reperietur enim:

$$\partial v = Mx^{n-1}\partial x + x^n \frac{\partial s}{s}\left(M - \frac{p}{Q}\right) + N\frac{x^{n-1}}{s}(s\partial x + x\partial s).$$

§. 11. Prioris partis litteram M involventis, siquidem M spectetur ut functio ipsius t tantum integrale necessarium est $\frac{1}{n}Mx^n$; tum autem esse debet

$$\frac{\partial M}{n} = \frac{\partial s}{s}\left(M - \frac{p}{Q}\right), \text{ sive } s\partial M - n\partial s\left(M - \frac{p}{Q}\right) = 0,$$

quae aequatio integrabilis evadit divisa per s^{n+1}, ut sit

$$\frac{s\partial M - nM\partial s}{s^{n+1}} = \frac{np\partial s}{Qs^{n+1}} \text{ cujus integrale est } \frac{M}{s^n} = -n\int\frac{p\partial s}{Qs^{n+1}}.$$

Quamobrem si ut ante ponamus $\int\frac{p\partial s}{Qs^{n+1}} = T$, habebimus $M = -nTs^n$, ideoque pro hac parte erit $v = -Tx^n s^n$ sive $v = -Tz^n$, posito scilicet $z = xs$.

§. 12. Pro altera parte litteram N involvente ea ob $xs = Z$ erit $N\frac{x^{n-1}}{s}z\partial$; quare cum N sit functio adhuc indeterminata, hujus partis integrale erit functio quaecunque ipsius z, quae si designetur per Z, existente $\partial Z = Z'\partial z$ erit $N = \frac{sZ'}{x^{n-1}}$, quocirca totum integrale erit $v = -Tz^n + Z$. Tum autem erit $\Theta = \frac{Z'z}{x^n} - nTs^n$, hincque colligitur ipsa functio quaesita $\Pi = \frac{\Theta Q - p}{qt - \Theta P}$ quae solutio perfecte congruit cum praecedente.

§. 13. Quanquam autem haec solutio totum negotium felicissime absolvit, tamen dantur casus ad quos hanc solutionem vix ac ne vix quidem accommodare licet. Hoc scilicet evenit, quoties

exponens $n = 0$, quoniam formulae $\int x^{n-1}\partial x$ valor tum est lx quam ob caussam iste casus peculiarem evolutionem postulat. Praeterea vero etiam casus quo $Qqt - Pp = 0$ in superiore solutione non comprehenditur, quoniam posuimus $\frac{\partial s}{s} = \frac{Qq\partial t}{Qqt - Pp}$. Hanc igitur ob rem etiam hunc casum seorsim evolvi conveniet.

Evolutio casus,
quo $n = 0$.

§. 14. Hic igitur est $\partial v = \frac{p\partial x + \Pi q\partial y}{\Pi P + Q}\ \frac{1}{x}$, quae aequatio, eliso ∂y, abit in hanc: $\partial v = \frac{\partial x}{x}\ \frac{p + \Pi qt}{\Pi P + Q} + \frac{\Pi q\partial t}{\Pi P + Q}$. Nunc ponatur ut ante $\Pi = \frac{\Theta Q - p}{qt - \Theta P}$, et habebitur $\partial v = \frac{\Theta\partial x}{x} + \frac{q\partial t(\Theta Q - q)}{Qqt - Pp}$, quae aequatio posito $\frac{Qq\partial t}{Qqt - P} = \frac{\partial s}{s}$ et $\Theta = M + N$ fit

$$\partial v = \frac{M\partial x}{x} + \frac{\partial s}{Qs}(MQ - p) + N\left(\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial s}{s}\right).$$

Hic primum patet, prius membrum integrabile esse non posse, nisi sit M constans, tum autem comprehendi poterit in altero membro; quamobrem hic statim ponere licet $M = 0$, hincque ex priore parte fiet $v = -\int\frac{p\partial s}{Qs}$, ita ut, posito $\int\frac{p\partial s}{Qs} = T$, hinc fiat $v = -T$. Pro altera autem parte, si statuamus ut ante $sx = z$, fit $\partial v = \frac{N}{z}\partial z$. Sit igitur $N = Z'z$, fiat $v = Z$, quocirca ob $M = 0$ erit $\Theta = Z'z$, hincque $\Pi = \frac{QZ'z - p}{qt - PZ'z}$, atque hinc integrale completum erit $v = Z - T$, quae forma ex solutione generali deduci potuisset, at vero ex praesente casu promtius colligitur

Evolutio casus,
quo $Qqt - Pp = 0$.

§. 15. Hoc igitur casu erit $P = \frac{Qqt}{p}$, unde aequatio nostra fit

$$\partial v = \frac{x^{n-1}\partial x(p + \Pi qt) + x^n\Pi q\partial t}{\Pi Qqt + Qp}\cdot p,$$

quae contrahitur in hanc formam:

$$\partial v = x^{n-1}\partial x \frac{p}{Q} + \frac{x^n \Pi p q \partial t}{Q(\Pi q t + p)}.$$

Ponatur nunc $\frac{\Pi p q}{\Pi q t + p} = \Sigma$ ita ut sit $\Pi = \frac{\Sigma p}{q(p - \Sigma t)}$, eritque $\partial v = \frac{p}{Q} x^{n-1} \partial x + \left(\frac{M \partial t}{Q} + \frac{N \partial t}{Q}\right) x^n$ ponendo scilicet $\Sigma = M + \frac{N}{x^n}$.

§. 16. Hic igitur prioris Partis integrale erit $v = \frac{p x^n}{n Q}$, si modo sit $M = \frac{Q}{n \partial t} \partial . \frac{p}{Q}$. Pars vero posterior statim dat $v = \int \frac{N \partial t}{Q}$. Sit igitur $\int \frac{\partial t}{Q} = u$, ac si U denotet functionem quamcunque ipsius u, sumto $N = U'$ erit ex utraque parte $v = \frac{p x^n}{n Q} + U$ et nunc erit

$$\Sigma = \frac{Q}{n \partial t} \partial . \frac{p}{Q} + \frac{U'}{x^n} \quad \text{et} \quad \Pi = \frac{\Sigma p}{q(p - \Sigma t)}.$$

§. 17. Si fuerit $n = 0$, introducta littera Σ erit

$$\partial v = \frac{p \partial x}{Q x} + \frac{\Sigma \partial t}{Q},$$

unde si statuamus $\frac{\partial t}{Q} = \partial u$, ponamusque $\Sigma = M l x + N$, denotante N functionem quamcunque ipsius u, scilicet $N = U'$, statim oritur ista aequatio integralis $v = \frac{p}{Q} l x + U$, siquidem fuerit $\partial . \frac{p}{Q} = M \partial u$. Cum igitur sit $M = \frac{1}{\partial u} \partial . \frac{p}{Q}$ erit $\Sigma = \frac{l x}{\partial u} \partial . \frac{p}{Q} + U'$ unde ex praecedente formula functio quaesita Π colligitur $\Pi = \frac{\Sigma p}{q(p - \Sigma t)}$, unde patet, istum casum prorsus diversae esse naturae quam ut ex praecedente solutione deduci potuisset.

XIV.

INTÉGRATION D'UNE ESPÈCE REMARQUABLE D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

DANS L'ANALYSE DES FONCTIONS À DEUX VARIABLES.

Présenté à l'Académie le 11. Déc. 1777.

Soit z une fonction des deux variables x et y et qu'on en tire les formules suivantes :

$$P = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$Q = \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + \frac{2\partial\partial z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$$

$$R = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{3\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{3\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

$$S = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{4\partial^4 z}{\partial x^3\,\partial y} + \frac{6\,\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{3\,\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$$

et ainsi de suite.

Cela posé je donnerai ici une méthode tout à fait singulière de trouver par une seule intégration l'intégrale complette de cette équation différentielle :

$$Az + BP + CQ + DR + ES + \text{etc.} = 0$$

à quelque degré que les différentielles puissent monter.

Pour cet effet il faut premièrement remarquer que toutes ces formules P, Q, R, S, etc. tiennent un très beau rapport entr'elles ; car comme on a $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = P$, on trouvera

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + \frac{2\partial\partial z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = Q$$

et de la même manière

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\frac{3\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+\frac{3\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=R.$$

Il y aura de même:

$$\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}=S,\quad \frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}=T;$$

ces rapports nous donneront donc les égalités suivantes:

I. $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=P$,

II. $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}=Q$,

III. $\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=R$,

IV. $\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}=S$,

et ainsi de suite.

Après avoir remarqué ce beau rapport, je considère en général cette équation différentielle: $\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=nv$, dont il s'agit de trouver l'intégrale complette. Pour cet effet je mets $\partial v=p\partial x+q\partial y$ et puisque $p=\frac{\partial v}{\partial x}$ et $q=\frac{\partial v}{\partial y}$ cette équation différentielle prendra la forme suivante: $nv=p+q$ et partant $nv\partial y=p\partial y+q\partial y$, qui étant soustraite de l'équation supposée: $\partial v=p\partial x+q\partial y$ fournit celle-ci: $\partial v-nv\partial y=p(\partial x-\partial y)$ qui, étant multipliée par e^{-ny} pour rendre le premier membre intégrable, donne

$$\partial.ve^{-ny}=pe^{-ny}(\partial x-\partial y)$$

d'où l'on voit que le multiplicateur du dernier membre pe^{-ny} doit nécessairement être fonction de $x-y$ et alors son intégrale sera de même une telle fonction; par conséquent l'intégration nous fournit $ve^{-ny}=\mathfrak{A}(x-y)$ en employant la lettre $\mathfrak{A}$ pour marquer une fonction quelconque de la quantité qui y est jointe, et je me servirai dans la suite pour le même effet des lettres suivantes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, pour en marquer d'autres fonctions. Voilà donc un beau lemme qui nous conduira à notre but proposé:

De cette équation différentielle: $nv = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$
l'intégrale complette est $v = e^{+ny} \mathfrak{A} : (x - y)$.

Maintenant pour trouver l'intégrale en question supposons dans ce lemme $v = az + bP + cQ + dR$ prennant pour l'équation différentielle proposée celle-ci:

$$Az + BP + CQ + DR + ES = 0$$

d'où l'on voit que la valeur de v doit renfermer un terme de moins que l'équation différentielle, et l'intégrale sera en vertu de notre lemme:

$$az + bP + cQ + dR = e^{ny} \mathfrak{A} : (x - y).$$

Qu'on met dans l'équation différentielle du lemme cette valeur prise pour v et on aura:

$$naz + nbP + ncQ + ndR = + a\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + d\left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\right).$$

Mettons donc ici au lieu des formules différentielles leurs valeurs finies marquées ci-dessus et notre équation tirée du lemme sera:

$$naz + nbP + ncQ + ndR = aP + bQ + cR + dS$$

qui étant rangée suivant l'ordre des lettres P, Q, R, prendra cette forme:

$$naz + (nb - a) P + (nc - b) Q + (nd - c) R - dS = 0.$$

Donc puisque nous venons de trouver l'intégrale de cette équation:

$$az + bP + cQ + dR = e^{ny} \mathfrak{A} (x - y)$$

on n'a quà rendre cette équation identique avec la proposée savoir

$$Az + BP + CQ + DR + ES = 0$$

et nous aurons les égalités suivantes:

$$A = na, B = nb - a, C = nc - b, D = nd - c, E = - d$$

d'où nous tirons les valeurs suivantes:

$d = - \mathrm{E}$
$c = - n\mathrm{E} - \mathrm{D}$
$b = - nn\mathrm{E} - n\mathrm{D} - \mathrm{C}$
$a = - n^3\mathrm{E} - nn\mathrm{D} - n\mathrm{C} - \mathrm{B}$ et enfin
$n^4\mathrm{E} + n^3\mathrm{D} + nn\mathrm{C} + n\mathrm{B} + \mathrm{A} = 0.$

Voilà donc une équation du quatrième ordre d'où l'on doit tirer la valeur de n, qui aura donc quatre valeurs que nous supposerons être α, β, γ, δ, dont chacune nous fournira une équation intégrale dont la première sera

$$az + b\mathrm{P} + c\mathrm{Q} + d\mathrm{R} = e^{\alpha y}\mathfrak{A}(x - y)$$

les autres valeurs β, γ, δ, produisent aussi d'autres valeurs pour les lettres a, b, c, d, que nous distinguerons à la manière usitée et au lieu de $\mathfrak{A}$ nous employerons les autres charactères pour les fonctions de $(x - y)$: cela posé ces autres racines fourniront les équations intégrales suivantes:

$$a' z + b' \mathrm{P} + c' \mathrm{Q} + d' \mathrm{R} = e^{\beta y}\mathfrak{B}(x - y)$$
$$a'' z + b'' \mathrm{P} + c'' \mathrm{Q} + d'' \mathrm{R} = e^{\gamma y}\mathfrak{C}(x - y)$$
$$a''' z + b''' \mathrm{P} + c''' \mathrm{Q} + d''' \mathrm{R} = e^{\delta y}\mathfrak{D}(x - y).$$

De ces quatre équations il ne sera pas difficile de déduire les valeurs des quatre quantités z, P, Q, R.

Or il est évident que chacune de ces lettres sera exprimée par de certains multiples des quatre formules à la droite; mais nous n'en avons besoin que de la premiere z; donc puisque les multiplicateurs constans ne changent point les fonctions arbitraires nous n'en tiendront compte non plus et partant nous aurons pour z la valeur suivante

$$z = e^{\alpha y}\mathfrak{A}:(x - y) + e^{\beta y}\mathfrak{B}:(x - y) + e^{\gamma y}\mathfrak{C}:(x - y) + e^{\delta y}\mathfrak{D}:(x - y)$$

qui renfermant quatre constantes arbitraires exprimera l'intégrale complette de l'équation différentielle proposée, que nous avons supposée monter au quatrième degré, quoiqu'il est facile à voir

quelle sera l'intégrale pour les cas où l'équation proposée monteroit ou à un plus haut degré de différentielle ou à un plus bas.

Tout révient donc à resoudre cette équation algébrique:

$$A + nB + n^2C + n^3D + n^4E + n^5F + \text{etc.} = 0$$

dont les racines étant supposées α, β, γ, δ, etc. on sera d'abord en état d'assigner l'intégrale complette de toutes ces équations différentielles à quelque degré différentiel qu'elles puissent monter.

Cependant ils se pourront rencontrer des cas, où l'évolution de l'intégrale causeroit quelque difficulté, tels par exemple, où deux ou plusieurs des racines pour le nombre n seroient imaginaires ou égales entr'elles. Pour le premier cas supposons que les deux racines α et β soyent imaginaires et qu'on ait trouvé $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ et $\beta = \mu - \nu\sqrt{-1}$ et pour déterminer réellement les deux membres de l'intégrale $e^{\alpha y}\mathfrak{A}(x-y) + e^{\beta y}\mathfrak{B}(x-y)$ posons

$$\mathfrak{A}(x-y) = \mathfrak{H}:(x-y) + \mathfrak{G}:(x-y) \quad \text{et}$$
$$\mathfrak{B}(x-y) = \mathfrak{H}:(x-y) - \mathfrak{G}:(x-y)$$

et nous parviendrons à cette forme:

$$e^{\mu y}\mathfrak{H}:(x-y)\left(e^{\nu y\sqrt{-1}} + e^{-\nu y\sqrt{-1}}\right)$$
$$+ e^{\mu y}\mathfrak{G}:(x-y)\left(e^{\nu y\sqrt{-1}} - e^{-\nu y\sqrt{-1}}\right).$$

Or on sait par la réduction des imaginaires qu'il y a

$$e^{\nu y\sqrt{-1}} + e^{-\nu y\sqrt{-1}} = 2\cos\nu y \quad \text{et} \quad e^{\nu y\sqrt{-1}} - e^{-\nu y\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\sin\nu y$$

donc puisqu'on peut rejetter les facteurs constans les deux membres qui repondoient aux deux valeurs α et β se reduiront à cette forme réelle:

$$e^{\mu y}\cos\nu y\,\mathfrak{H}:(x-y) + e^{\mu y}\sin\nu y:\mathfrak{G}(x-y).$$

Pour l'autre cas où deux ou plusieurs des racines α, β, γ, deviennent égales entre elles supposons d'abord $\beta = \alpha$ et puisqu'alors les deux premiers membres se réuniroient dans un seul et qu'on n'auroit plus autant de fonctions arbitraires que le degré de

l'équation différentielle proposée exige, supposons $\beta = \alpha + \omega$ en prennant ω pour marquer une quantité infiniment petite et puisque $e^{\omega y} = 1 + \omega y + \frac{1}{2}\omega^2 yy +$ etc. nous aurons $e^{\beta y} = e^{\alpha y}(1 + \omega y)$ et puisqu'il est permis de mettre $\mathfrak{B}:(x-y)$ au lieu de $\omega\mathfrak{B}(x-y)$ nous aurons au lieu des deux premiers termes qui repondent à α et β ces deux nouveaux $e^{\alpha y}\mathfrak{A}:(x-y) + e^{\alpha y}\mathfrak{B}:(x-y)$. Par le même raisonnement on se convaincra facilement que s'il y avoit trois racines égales $\alpha = \beta = \gamma$ on auroit au lieu des trois membres qui repondent à ces lettres ces trois autres :

$$e^{\alpha y}\mathfrak{A}:(x-y) + e^{\alpha y} y\mathfrak{B}:(x-y) + e^{\alpha y} y^2\mathfrak{C}:(x-y)$$

et s'il y avoit une quatrième racine égale, on n'auroit qu'à ajouter aux trois termes annoncés ce quatrième $e^{\alpha y} y^3\mathfrak{D}:(x-y)$, d'où nous pourrons resoudre les problèmes particuliers suivans.

Problème I.

Trouver l'intégrale complette de cette équation particulière :

$$P = 0, \text{ ou } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Solution.

Puisque ici $P = 0$, nous aurons dans l'équation générale :

$$A = 0,\ B = 1,\ C = D = E = 0,$$

d'où l'équation pour trouver le nombre n sera $n = 0$; d'où l'on tire $\alpha = 0$ et partant l'intégrale complette sera $z = \mathfrak{A}:(x-y)$.

Problème II.

Trouver l'intégrale complette de cette équation $Q = 0$ ou bien

$$\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + \frac{2\partial\partial z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = 0.$$

Solution.

Puisque ici $Q = 0$, nous aurons dans la formule générale:

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 1;\ D = E = F = 0;$$

d'où pour déterminer le nombre n, nous aurons cette équation $nn = 0$, donc les deux racines $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ et partant égales entr'elles; par conséquent l'intégrale complette sera :

$$z = \mathfrak{A} : (x - y) + y\,\mathfrak{B} : (x - y).$$

Problème III.

Trouver l'intégrale complette de cette équation :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{3\,\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{3\,\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0.$$

Solution.

Puisque ici $R = 0$ nous aurons dans l'équation générale :

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 1;\ E = F = 0;$$

d'où l'équation pour le nombre n sera $n^3 = 0$ et partant $\alpha = \beta = \gamma = 0$ par conséquent l'intégrale complette sera :

$$z = \mathfrak{A} : (x - y) + y\,\mathfrak{B} : (x - y) + y^2\,\mathfrak{C} : (x - y).$$

COMMENTATIONES

Cel. ***F. T. SCHUBERT.***

I.

DE LA SOLUTION DES ÉQUATIONS IMPLICITES À DEUX VARIABLES.

Présenté et lu le 27. Août 1823.

§. 1. Une équation (A) entre deux variables, x, y, étant proposée, qui renferme diverses puissances de ces deux variables et leurs produits, ensorte que y soit une fonction implicite de x; le problème dont il s'agit ici, consiste à exprimer y par une fonction explicite de x. La solution directe ou complète de ce protblème n'est autre chose que la solution générale des équations algébriques, en regardant y comme l'inconnue dans l'équation proposée (A), et x comme une quantité donnée qui entre dans les coëfficiens. Ainsi la solution n'a aucune difficulté, lorsque l'équation (A) ne renferme pas de puissances de y, plus élevées que la seconde ou la troisième, ou qu'elle pourra être ramenée à une équation du second ou du troisième degré. Dans tout autre cas on ne sauroit exprimer y que par une série infinie, ordonnée sui-

vant les puissances de x; et pour que cette série soit convergente, il faut que x soit beaucoup plus ou moins grand que l'unité : dans le premier cas on cherchera une série descendante de x, dans le second cas une série ascendante. Si la valeur de $x = a$, pour laquelle on cherche la valeur de y, diffère peu de l'unité, la série ne pourra être rendue convergente, à moins que la solution directe ou les conditions du problème ne donnent la valeur de $y = c$, qui répond à une valeur b de x, peu différente de a. Tout se réduit donc à former une série convergente :

$$(B) \quad . \ . \ . \ . \quad y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{cet.}$$

qui satisfasse à l'équation (A): ce qui revient à déterminer les exposans α, β, γ, etc. et les coëfficiens A, B, C, etc. Il serait facile de déterminer ces derniers, par la *méthode des coëfficiens indéterminés*, si on connoissait les exposans ; mais la difficulté est, qu'on ne connaît ni le premier coëfficient α, ni la loi suivant laquelle les coëfficiens β, γ, etc. procèdent.

Newton imagina pour cet effet le *parallèlogramme*, connu sous cet illustre nom, lequel, par la simple inspection ou par le moyen d'une règle, donne une solution aussi simple qu'ingénieuse, qui ne laisse rien à désirer. Le célèbre *Kästner* a expliqué et démontré cette méthode, dans son Analyse (*). Comme elle est cependant, pour ainsi dire, mécanique ou géométrique, *Lagrange* donna une solution purement analytique qui, dans le fond, n'est autre chose que la théorie du *parallèlogramme de Newton*, exprimée dans le langage analytique, ainsi qu'on le verra. On trouve la méthode de *Lagrange*, développée et prouvée dans l'excellent ouvrage de M. *Lacroix* (**). Après avoir examiné avec attention ces démonstrations, dont celle de *Kästner* remplit 56 pages, il m'a paru, vù l'importance de ce problème, qu'il ne serait pas in-

(*) *Anfangsgründe der Analysis endlicher Gröfsen*, pag. 324-380.
(**) *Traité du Calc. Différ. et Int. Tom. I*, p. 219-231. (p. 102-113 de la 2e. éd.)

utile d'en donner une démonstration moins longue et moins obscure. Je commencerai par le parallèlogramme, et je ferai voir que la méthode de *Lagrange* est une suite immédiate de celle de *Newton*.

Fig. 6. §. 2. Soit TVXY un parallèlogramme, et supposons pour plus de simplicité, que ce soit un rectangle, ayant deux côtés verticaux, TV, XY, et deux côtés horizontaux, TY, VX. Concevons ce rectangle partagé, par des lignes droites, parallèles à TV et TY, en rectangles égaux et semblables, dont les côtés verticaux soient $ak = \varkappa$, et les côtés horizontaux $al = \lambda$; supposons enfin, que chacun des petits rectangles représente un terme $x^r y^s$ de l'équation proposée, en observant que la direction de bas en haut, TV ou YX, indique les puissances croissantes de x, et celle de gauche à droite, TY ou VX, les puissances croissantes de y; et désignons chaque case, comme B, par son angle b, qui est en bas et à gauche, et que je nommerai le *coin* de la case. Maintenant ayant inscrit chaque terme de l'équation (A) dans la case qui lui appartient, par ce qui précède, supposons qu'on se propose d'exprimer y par une série ascendante, et que le terme $x^m y^n$, dans lequel l'exposant n de y est le moins élevé, soit placé dans la première colonne verticale TU, ensorte que tout autre terme $x^r y^s$ de l'équation (A) se trouvera à droite de la colonne TU, s étant plus grand que n. Cela posé il est visible qu'en mettant la règle, ou menant une droite par le coin a de la case A qui renferme le terme $x^m y^n$, et la tournant autour de a, de la position verticale aT jusqu'à sa rencontre avec le coin b d'une case B qui renferme un autre terme $x^{m'} y^{n'}$ de l'équation (A), de sorte qu'aucun des autres termes ne se trouve au-dessous de la prolongation de la droite ab, on aura une première solution suivant la méthode de *Newton*, qui consiste à égaler les deux termes, inscrits dans les cases A et B, et à faire $y = Ax^\alpha$, α étant l'exposant de y, qui résultera de l'équation $x^m y^n = x^{m'} y^{n'}$. Pour vérifier cette méthode, il faut prouver qu'après avoir substitué $y = Ax^\alpha$, tous

les termes de l'équation (A), qui sont au-dessus de la droite *abe*, auront un exposant de x, plus grand que celui des termes A et B; que les cases au-dessous de *abe* auront un exposant moins grand; et que celles dont les coins se trouvent sur la droite même, auront le même exposant de x.

Je supposerai, pour plus de simplicité, 1) qu'on cherche toujours une série ascendante, x étant très-petit, parce qu'il est aisé de voir que, dans le cas contraire, on n'a qu'à substituer $x = \frac{1}{z}$, et à exprimer y par une série ascendante de z, 2) que l'équation (A) ne renferme que des puissances de x et de y, dont les exposans sont des nombres entiers et positifs, parce qu'il est aisé de réduire à cette forme une équation quelconque, en multipliant par les puissances qui se trouvent aux dénominateurs, et substituant pour x ou y, z^q, q étant un nombre entier, divisible par tous les dénominateurs des exposans fractionnaires.

§. 3. Puisqu'on se propose de déterminer le premier terme de la série ascendante $y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma +$ cet. il est clair qu'il faut supposer au moins deux termes de l'équation (A) égaux entre eux par rapport aux exposans, et qu'il faut choisir pour ces termes les plus considérables, parceque Ax^α sera déterminée par une approximation qui néglige les autres termes. En effet, si le plus grand terme de l'équation (A).... $0 = u$, que je désignerai par $x^m y^n$, était unique, on aurait, pour la première approximation, $0 = x^m y^n$, et substituant $y = x^\alpha$, $0 = x^{m + n\alpha}$, donc $x = 0$: ainsi, α restant indéterminé, on voit qu'un terme unique ne donnera aucune solution. C'est par cette raison qu'il faut égaler deux termes, ou qu'il faut mettre la règle par deux cases A, B, lesquelles, pour renfermer les termes les plus considérables doivent être placées de manière que tous les autres termes de (A) aient leurs cases au-dessus ou à droite de la règle *abe*.

Pour le prouver, désignons par $A = x^m y^n$ et $B = x^{m'} y^{n'}$ les deux termes qu'on suppose égaux ou du même ordre, et par $R = x^r y^s$ un autre terme quelconque, renfermé dans la case R. Cela posé l'égalité de A et B donnera, en substituant $y = A x^\alpha$, l'équation $m + n\alpha = m' + n'\alpha$, d'où il suit

$$\text{(C)} \quad \ldots \quad \alpha = \frac{m - m'}{n' - n},$$

$n' - n$ étant toujours positif, parceque n est le plus petit exposant de y (§. 2.), tandis que $m - m'$, et par conséquent α, pourra être positif ou négatif. Si on désigne par p et par t les exposans de x, qu'auront les termes A et R, après avoir substitué $y = x^\alpha$, on trouvera $p = m + n\alpha$, $t = r + s\alpha$, ou :

$$\text{(D)} \quad \ldots \quad p = \frac{(n' - n)m + (m - m')n}{n' - n},$$

$$\text{(E)} \quad \ldots \quad t = \frac{(n' - n)r + (m - m')s}{n' - n}.$$

Nommant h et ϕ les angles que font les droites abe et ar avec la verticale AT, $Tae = h$, $Tar = \phi$, on aura

$$\text{tang}\, h = \frac{b\beta}{a\beta}, \quad \text{tang}\, \phi = \frac{r\varrho}{a\varrho}, \quad \text{donc}$$

$$\text{(F)} \ldots \text{tang}\, h = \frac{(n' - n)\lambda}{(m - m')\varkappa}, \quad \text{(G)} \ldots \text{tang}\, \phi = \frac{(s - n)\lambda}{(m - r)\varkappa},$$

n' et s étant plus grands que n (§. 2.).

Maintenant il faut distinguer les cas suivans : I. h étant un angle *aigu*, II. un angle *droit*, III. un angle *obtus*.

Cas I. tang h étant positif, m est plus grand que m'. Supposons 1. que ϕ soit un angle aigu, et par conséquent $m > r$: cela posé, ϕ sera $\gtreqless h$, selon que tang $\phi \gtreqless$ tang h, ou que

$$\frac{s - n}{m - r} \gtreqless \frac{n' - n}{m - m'} \quad \text{(F) (G)},$$

ou selon que $(m - m')s + (n' - n)r \gtreqless (n' - n)m + (m - m')n$: ce qui étant comparé avec les équations (D) (E), donne le résultat, que $t \gtreqless p$, selon que $\phi \gtreqless h$. Supposant 2. que ϕ soit un angle droit ou obtus, et par conséquent $\phi > h$, on aura

$$\text{(G)} \ldots r = m \quad \text{ou} \quad r > m.$$

Faisant donc $r = m + \varrho$, ϱ étant nul ou positif, on aura (D) (E),

$$(n' - n)\,p = (n' - n)\,m + (m - m')\,n\,,$$
$$(n' - n)\,t = (n' - n)\,(m + \varrho) + (m - m')\,s\,,$$

donc $t > p$, parceque $s > n$.

Cas II. Les équations (F) (D) (E) donnent pour ce cas, $m' = m$, $p = m$, $t = r$: donc $t \gtreqless p$, lorsque $r \gtreqless m$; d'où il suit qu'un terme quelconque R aura un exposant de x, plus ou moins grand que le terme A, ou le même exposant, selon que la case R est au-dessus ou au-dessous de la droite *abe*, ou sur cette ligne même qui, dans ce cas, est horizontale.

Cas III. L'équation (F) donne $m' > m$. Supposons 1. que ϕ soit un angle aigu ou droit, et par conséquent $\phi < h$; et faisons $m' = m + \mu$, $m = r + \varrho$, ϱ étant nul ou positif (G). Cela posé les équations (D) (E) donneront

$$(n'-n)p = (n'-n)\,m - \mu n,\quad (n'-n)\,t = (n'-n)\,(m - \varrho) - \mu\,s,$$

donc $t < p$, parceque $s > n$. Supposant 2. $\phi > 90^\circ$, on aura

$$(G)\ldots r > m,\quad \text{ou } r = m + \varrho,\ m' = m + \mu\,,$$
$$\text{tang}\,h = -\frac{(n'-n)\,\lambda}{\mu\,x},\quad \text{tang}\,\phi = +\frac{(s-n)\,\lambda}{\varrho\,x},$$

et par la nature des tangentes, ϕ sera $\gtreqless h$, selon que

$$\frac{(n'-n)\,\lambda}{\mu\,x} \gtreqless \frac{(s-n)\,\lambda}{\varrho\,x},\quad \text{ou que } (n'-n)\,\varrho \gtreqless (s-n)\,\mu.$$

Mais les équations (D) (E) donnent

$$(n'-n)p = (n'-n)\,m - \mu n,\quad (n'-n)\,t = (n'-n)\,(m + \varrho) - \mu\,s,$$

donc $t \gtreqless p$, lorsque $(n' - n)\,\varrho \gtreqless \mu\,(s - n)$: d'où il suit que $t \gtreqless p$, selon que $\phi \gtreqless h$.

Nous avons donc prouvé que, dans tous les cas, l'exposant de x dans un terme quelconque R sera égal à p, ou plus ou moins grand, selon que l'angle ϕ est égal à h, ou plus ou moins grand; c'est-à-dire, selon que la case R se trouvera sur la droite *abe* même, ou au-dessus ou au-dessous: ce qu'il fallait prouver.

§. 4. Comme l'équation (A), dans laquelle y est élevé au delà du premier degré, aura plusieurs racines, il est clair qu'outre la solution, $y = Ax^{\alpha} +$ cet. il y en aura encore d'autres. Ces solutions seront trouvées, par la méthode de *Newton*, en tournant la règle autour du coin b de la case B qui, parmi toutes celles dans la droite abe, a le plus grand exposant de y, jusqu'à ce qu'elle rencontre le coin c d'une case C qui se trouvait au-dessus de abe. Cela posé, la règle ayant la position bcm, on obtiendra une seconde solution, en égalant les termes $B = x^{m'}y^{n'}$ et $C = x^{m''}y^{n''}$. La démonstration précédente sera facilement étendue à la droite bcm. Ayant prolongé cb jusqu'à sa rencontre avec la verticale VT en δ, il est visible que les formules précédentes s'appliqueront au cas présent, si on substitue m', n', pour m, n, et m'', n'', pour m', n'. Faisant donc $T\delta m = h$, $T\delta\nu = \Phi$, on aura par ce qui précède (§. 3.),

$$(C') \ldots \alpha = \frac{m' - m''}{n'' - n'}, \quad (D') \ldots p = \frac{(n'' - n')\,m' + (m' - m'')\,n'}{n'' - n'},$$

$$(E') \ldots t = \frac{(n'' - n')\,r + (m' - m'')\,s}{n'' - n'}, \quad (F') \ldots \text{tang}\, h = \frac{(n'' - n')\,\lambda}{(m' - m'')\,\varkappa}.$$

On a de plus $\text{tang}\,\Phi = \frac{\varrho r}{\varrho \delta}$, $\varrho r = (s - n)\,\lambda$, $\varrho\beta = (m' - r)\,\varkappa$,

$$\beta b = (n' - n)\,\lambda, \quad \beta\delta = \beta b \,.\, \cot h = \frac{(n' - n)\,(m' - m'')\,\varkappa}{n'' - n'}.$$

Faisant donc $n' - n = \nu$, $n'' - n' = \nu'$, $s - n = \sigma$, on aura

$$(G') \ldots \text{tang}\,\Phi = \frac{\nu' \sigma \lambda}{\{\nu'(m' - r) + \nu(m' - m'')\}\,\varkappa}, \quad \text{et}$$

$$(F') \ldots \text{tang}\, h = \frac{\nu' \lambda}{(m' - m'')\,\varkappa}.$$

Il sera facile de tirer de ces formules le même résultat que le précédent (§. 3.).

Cas I. 1. $\Phi \gtreqless h$, selon que $(m' - m'')\sigma \gtreqless \nu'(m' - r) + \nu(m' - m'')$ ou $(m' - m'')\,s + \nu' r \gtreqless (m' - m'')\,n' + \nu' m'$, c'est-à-dire selon que $t \gtreqless p$, (E') (D').

Cas I. 2. $m' > m''$, $r > m'$, et $\nu'(r - m') \geqq \nu(m' - m'')$. Mais $\nu' r = \nu' t - (m' - m'')\,s$, par l'équation (E'); d'où il suit

$\nu' t \geqq \nu' m' + (m' - m'')(\nu + s)$, donc $t > p$, parcequ'en vertu de l'équation (D'), $\nu' p = \nu' m' + (m' - m'')(\nu + n)$, et $s > n$.

Cas II. $m'' = m'$, $p = m'$, $t = r$: d'où il suit $t \gtreqless p$, selon que la case R est au-dessus ou au-dessous de la ligne horizontale *bcm*, ou sur cette ligne même.

Cas III. 1. $m'' > m'$ ou $m'' = m' + \mu'$, et $\nu'(m' - r) \geqq \nu\mu'$, ou $\nu' r \leqq \nu' m' - \nu\mu'$. Substituant $\nu' r = \nu' t + \mu' s$, par l'équation (E'), il viendra $\nu' t \leqq \nu' m' - \mu'(\nu + s)$. Mais l'équation (D') donne $\nu' p = \nu' m' - \mu'(\nu + n)$; donc $t < p$, à cause de $n < s$.

Cas III. 2. $m'' = m' + \mu'$, $\nu\mu' > \nu'(m' - r)$, et $\Phi \gtreqless h$, selon que $\frac{\nu'\lambda}{\mu' \varkappa} \gtreqless \frac{\nu' \sigma \lambda}{\{\nu \mu' - \nu'(m' - r)\} \varkappa}$, ou que $\nu\mu' - \nu' m' + \nu' r \gtreqless \mu' s - \mu' n$. Mais l'équation (E') donne $\nu' r = \nu' t + \mu' s$; d'où il vient $\Phi \gtreqless h$, selon que $\nu' t \gtreqless \nu' m' - \nu\mu' - \mu' n$, ou selon que $t \gtreqless p$, parcequ'en vertu de l'équation (D'), $\nu' p = \nu' m' - \mu' n' = \nu' m' - \mu'(\nu + n)$.

§. 5. Nous avons donc prouvé, pour les positions de la règle, *ab* et *bc*, c'est-à-dire, pour toutes les solutions dont l'équation proposée est susceptible, que dans tous les cas, les termes ou les cases qui se trouvent au-dessus de la règle, auront un exposant de x, plus grand que les cases dont les coins sont sur la prolongation de la règle, et que celles-ci auront toutes un même exposant de x. Au reste il est visible que, si on égale un terme $C = x^{m''} y^{n''}$ à $B = x^{m'} y^{n'}$, pour en tirer une seconde solution, n'' doit être plus grand que n'. En effet lorsque $n'' < n'$, la règle tombera à gauche de la verticale *b*U, et par conséquent audessus de la première case A, à moins qu'elle ne coïncide avec la règle dans sa première position *ba*: dans le premier cas on n'aurait aucune solution, dans le dernier cas on retomberait sur la première solution. Lorsque $n'' = n'$, la règle coïncidera avec la verticale *b*U, et il est aisé de voir qu'une pareille position ne

donnera aucune solution. En effet il en suit tang $h = 0$, $n'' = n'$, et l'égalité des termes $B = x^{m'}y^{n'}$ et $C = x^{m''}y^{n''}$ donne, en divisant par $y^{n'} = y^{n''}$, $m'' = m'$, de sorte que $\alpha = \frac{m' - m''}{n'' - n'} = \frac{0}{0}$ reste indéterminé. Cela nous apprend en même tems, qu'on ne doit inscrire, dans chaque colonne verticale, qu'un seul terme, et nommément celui qui est le plus bas, comme C; parceque la comparaison des termes C et N ne donne aucune solution, et que, si on fait passer la règle par N, dans une position qui n'est pas verticale, la case C se trouvera toujours au-dessous de la règle. Ainsi le terme N est tout-à-fait inutile, pour déterminer le premier exposant α.

§. 6. Les deux remarques précédentes (§. 5.) donnent le résultat suivant.

1. Si l'équation (A) renferme plusieurs termes, qui sont multipliés par la même puissance de y, on ne doit conserver que celui de ces termes, dans lequel l'exposant de x est le plus petit: on n'aura besoin des autres termes, que pour trouver les termes suivans, x^β, x^γ, etc. de la série $y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma +$ cet.

2. Après avoir trouvé une première solution, par la comparaison du premier terme A avec un autre B, on ne doit comparer B qu'avec un terme C, multiplié par une plus grande puissance de y que B, pour avoir une seconde solution. Il en est de même de la troisième solution, fournie par la règle *cr* ou *cd*.

§. 7. Maintenant il sera facile de donner à la solution précédente une forme analytique. On a vu que tout se réduit à supposer $y = Ax^\alpha$, et à égaler deux termes de l'équation proposée, A et B, tels qu'après la substitution de $y = x^\alpha$, l'exposant de x dans tous les autres termes de l'équation (A) soit plus grand que dans le terme $x^m y^n$; ou d'après la notation précédente, que t soit plus

grand que p. Désignant, comme ci-dessus, les deux termes de l'équation (A), dont l'égalité a servi à déterminer α par $x^m y^n$ et $x^{m'} y^{n'}$, et tout autre terme par $x^r y^s$, on a (C) (§. 3.), $\alpha = \frac{m-m'}{n'-n}$, ou faisant pour abréger, $m - m' = \mu$, $n' - n = \nu$, (C) (D) (E),

$$\alpha = \frac{\mu}{\nu}, \quad p = \frac{m\nu + n\mu}{\nu}, \quad t = \frac{\nu r + \mu s}{\nu}:$$

ainsi l'équation de condition, $t > p$, sera

$$\nu r + \mu s > \nu m + \mu n, \text{ ou } \mu(s-n) > \nu(m-r), \text{ ou enfin}$$

$$(H) \; \ldots\ldots \; \frac{\mu}{\nu} > \frac{m-r}{s-n}.$$

Mais $\frac{\mu}{\nu} = \alpha$, et si on substitue r, s, pour m', n', c'est-à-dire, qu'on mette le terme $x^r y^s$ à la place de $x^{m'} y^{n'}$, α se changera en $\frac{m-r}{s-n}$: cette dernière quantité sera donc la valeur que prendra α, si, au lieu du terme $x^{m'} y^{n'}$, un terme quelconque $x^r y^s$ est égalé au premier terme $x^m y^n$. Si on désigne par α' cette valeur de α, qui résulte de la comparaison du premier terme avec un terme quelconque de l'équation (A), l'équation de condition (H) se changera en

$$(K) \ldots\ldots \alpha > \alpha';$$

c'est-à-dire, *la plus grande* de toutes les valeurs de α', qu'on trouvera par la comparaison du terme qui a le plus petit exposant de y, avec tous les autres, doit être prise pour l'exposant de x dans le premier terme de la série $y = Ax^\alpha + Bx^\beta +$ cet.

§. 8. La condition (K), et tout ce qui précède, peut être compris dans la règle suivante:

„Après avoir ordonné l'équation (A) .. $u = 0$, suivant les puis-
„sances croissantes de y, en observant que, s'il y a plusieurs
„termes, multipliés par la même puissance de y, on n'aura égard
„qu'à celui, dans lequel x a le plus petit exposant (§. 6. *n.* 1.)
„on égalera le premier terme A à chacun des suivans, relative-
„ment aux exposans de x et y ou x^α, savoir $m + n\alpha = m' + n'\alpha$,

„ $m + n\alpha = r + s\alpha$, etc. ce qui donnera autant de valeurs de „ α, $\frac{m-m'}{n'-n}$, $\frac{m-r}{s-n}$, etc. On prendra la plus grande de ces va- „ leurs de α (§. 7.), et on égalera à zéro la totalité des termes „ B qui, par la substitution de la plus grande valeur de α, auront „ le même exposant de x que le terme A: l'équation qui en ré- „ sulte, (et qui n'est autre chose que l'équation (A), si on néglige „ tous les termes de y, excepté le premier) donnera l'exposant α „ et le coëfficient A, donc le premier terme $y = Ax^{\alpha}$ de la pre- „ mière solution (§. 2.). On partira ensuite du dernier des „ termes B, pour l'égaler à chacun des suivans; et la plus grande „ des valeurs de α, qui en résultent, donnera, par le même pro- „ cédé, une seconde solution (§. 6. n. 2.). En continuant ainsi, „ jusqu'à ce qu'on arrive au dernier terme de l'équation (A), on „ trouvera toutes les solutions, dont le problème, énoncé par l'équa- „ tion (A), est susceptible."

Cette règle est précisément la même, que celle donnée par la méthode de *Lagrange*.

§. 9. Après avoir trouvé, par le procédé que nous venons de développer, le premier terme $y = Ax^{\alpha}$ d'une solution, il faut changer les termes suivans. La règle qu'on donne pour cet effet, est de substituer dans l'équation (A), $y = Ax^{\alpha} + p + q + r +$ cet. et d'en conclure successivement les valeurs de p, q, etc. à peu près comme on trouve les racines des équations numériques d'une inconnue, par des approximations successives. Mais le calcul sera, dans notre problème, beaucoup plus long et fatiguant, parceque les exposans de x dans les quantités p, q, etc. ne sont pas connus, et qu'il faut une grande précaution, pour discerner les termes du développement de (A), qui serviront à déterminer chacune des quantités p, q, etc. Le parallélogramme de *Newton* offre encore un moyen très-simple de trouver, par une simple inspection, les exposans de x en p, q, etc. aussi bien que les termes de l'équation (A), qui serviront à déterminer les

coëfficiens de p, q, etc. Après avoir trouvé α par le moyen de la droite *abe*, il est visible, que les exposans de x dans les autres termes de (A) seront d'autant plus petits, ou que les termes mêmes seront d'autant plus grands, que leurs cases sont plus proches de la droite *abe*. Pour le prouver, soit $S = x^r y^s$ une case, dont la distance à la droite *abe* sera la perpendiculaire $sv = u$, abaissée du coin s sur *abe*. On a $s\gamma = (s-n)\lambda$, $a\gamma = (m-r)\varkappa$, $\gamma p = a\gamma \cdot \operatorname{tang} h$, donc par l'équation (F), $\gamma p = \frac{\nu(m-r)\lambda}{\mu}$, ν étant $= n'-n$, $\mu = m-m'$; d'où il vient $ps = s\gamma - \gamma p = \frac{\mu(s-n)+\nu(r-m)}{\mu}\lambda$, et $sv = ps \cdot \sin spv = ps \cdot \cos h$; donc

$$u = \frac{\lambda}{\mu}\cos h \{\mu(s-n)+\nu(r-m)\}.$$

Rejettant le facteur constant $\frac{\lambda}{\mu}\cos h$, et les termes constans μn et νm, il est évident que u dépend seulement de $\mu s + \nu r = \nu t$ (§. 3. (E)). Il en suit, que l'exposant t de x dans un terme quelconque S sera plus ou moins grand que l'exposant t' dans un autre terme S′, selon que la case de S est plus ou moins éloignée de la droite *abe* que celle de S′, et que t sera égal à t', si les deux cases se trouvent à la même distance de la règle *abe*: ce qu'il fallait démontrer.

Il est aisé de conclure de là ce qui suit. Le terme $S = x^r y^s$ qui est le plus proche de la droite *abe*, et tous ceux, $S' = x^r y^s$, etc. qui se trouvent à la même distance de *abe*, seront d'un ordre immédiatement inférieur à celui des termes A, B, situés sur la ligne *abe* même: en conséquence les premiers termes de leurs développemens, en substituant $y = Ax^\alpha + p + q + r +$ cet. seront du même ordre que les seconds termes de A, B: c'est-à-dire les termes de S, S′, qui sont indépendans de p, q, etc. seront de l'ordre de ceux de A, B, qui sont multipliés par la première puissance de p. Il en suit qu'en égalant séparément à zéro la totalité des termes de A, B, qui ont la forme Mp, et des termes de

S, S', qui sont de la forme Nx^{α}, M étant une quantité indépendante de p, q, etc. et N une constante, on trouvera $p = Bx^{\beta}$.

Le même procédé pourrait servir à trouver les autres termes $q = Cx^{\gamma}$, etc. mais il est plus simple, de chercher les exposans β, γ, δ, etc. par la méthode suivante.

§. 10. Supposons que l'équation proposée, étant ordonnée suivant les puissances croissantes de x, en faisant $y = x^{\alpha}$, soit

$$(A) \ldots. 0 = ax^m y^n + a'x^{m'}y^{n'} + bx^r y^s + b'x^{r'}y^{s'} + b''x^{r''}y^{s''} + \text{cet.}$$

les deux premiers termes étant ceux qui ont fourni le premier terme de $y = Ax^{\alpha}$, de sorte que $0 = A^n a x^{m+n\alpha} + A^{n'} a' x^{m'+n'\alpha}$, d'où il vient

$$(a) \ldots \alpha = \frac{m - m'}{n' - n}, \quad (b) \ldots A = \left(-\frac{a}{a'}\right)^{\frac{1}{n'-n}}.$$

Supposons maintenant

$$(c) \ldots y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \text{cet.}$$

et faisons pour abréger,

$$(d) \ldots \beta - \alpha = \beta', \ \gamma - \alpha = \gamma', \ \delta - \alpha = \delta', \text{ etc.}$$

$$(e) \ldots A + Bx^{\beta'} + Cx^{\gamma'} + Dx^{\delta'} + \text{cet.} = S.$$

Cela posé l'équation (A) se changera en

$$0 = ax^{m+n\alpha} S^n + a'x^{m'+n'\alpha} S^{n'} + bx^{r+s\alpha} S^s + b'x^{r'+s'\alpha} S^{s'} + \text{cet.}$$

ou à cause de $m' + n'\alpha = m + n\alpha$, par l'équation (a),

$$(B) \ldots 0 = x^{m+n\alpha} (a \,.\, S^n + a'S^{n'}) + bx^{r+s\alpha} S^s + b'x^{r'+s'\alpha} S^{s'} + b''x^{r''+s''\alpha} S^{s''} + \text{cet.}$$

Faisant pour abréger,

$$(f) \ldots. m + n\alpha = k, \ r + s\alpha = t, \ r' + s'\alpha = t', \ r'' + s''\alpha = t'', \text{ etc.}$$

$$(g) \ldots. t - k = \tau, \ t' - k = \tau', \ t'' - k = \tau'', \text{ etc.}$$

l'équation B deviendra, en divisant par x^k,

$$(C) \ldots 0 = aS^n + a'S^{n'} + bx^{\tau} S^s + b'x^{\tau'} S^{s'} + b''x^{\tau''} S^{s''} + \text{cet.}$$

t étant plus grand que k, $\tau' > \tau$, $\tau'' > \tau'$, $\tau''' > \tau''$, etc. Le

développement de S^n, $S^{n'}$, S^s, etc. donnera à cause de $aA^n + a'A^{n'} = 0$, par l'équation (b), en faisant abstraction des coëfficiens A, etc., parcequ'il ne s'agit ici que des exposans de x,

$$(D) \ldots 0 = (an + a'n')(Bx^{\beta'} + Cx^{\gamma'} + Dx^{\delta'} + \text{cet.}) \\ + b\,x^{\tau}\{A^s + s\,(Bx^{\beta'} + Cx^{\gamma'} + \text{cet.}) + \text{cet.}\} \\ + b'x^{\tau'}\{A^{s'} + s'\,(Bx^{\beta'} + \text{cet.}) + \text{cet.}\} + \text{cet.}$$

Puisque chacune des quantités β', γ', etc. doit être déterminée par le terme le plus considérable qui la renferme, on aura les équations suivantes :

$$(E) \ldots \begin{cases} 0 = (an + a'n')\,Bx^{\beta'} + bA^s x^{\tau}, \\ 0 = (an + a'n')\,Cx^{\gamma'} + bs\,Bx^{\tau+\beta'} + b'A^{s'}x^{\tau'}, \end{cases}$$

et ainsi du reste ; où il faut observer que, parmi les termes de chaque équation (E), qui viennent après le premier, on ne conservera que ceux qui ont le moindre exposant de x, les autres étant ajoutés à l'équation suivante ; ce qui est évident par la méthode des coëfficiens indéterminés. On aura donc ces équations :

$$(F) \ldots \begin{cases} \beta' = \tau,\ \gamma' = \tau + \beta' = 2\tau,\ \text{ou}\ \gamma' = \tau',\ \delta' = \tau'', \\ \text{ou}\ \delta' = 2\tau,\ \text{ou}\ \delta' = \tau' + \beta' = \tau + \tau',\ \text{ou}\ \delta' = 3\tau,\ \text{etc.} \end{cases}$$

Il est aisé de conclure de là que, pour trouver les quantités β', γ', δ', etc. on formera des quantités

$$\tau,\ 2\tau,\ 3\tau,\ 4\tau,\ \text{etc.}\ \ \tau',\ 2\tau',\ \tau + \tau',\ \tau'',\ \tau + \tau'',\ \tau' + \tau'',\ 2\tau'',\ \text{etc.}$$

une série ascendante, en ajoutant chaque quantité τ, τ', etc. à elle-même et à chacune des autres, plusieurs fois ; et on égalera β' au premier terme de cette série, au plus petit, τ, γ' au second, δ' au troisième, etc. Ayant trouvé β', γ', δ', etc. on connaîtra en même tems $\beta = \alpha + \beta'$, $\gamma = \alpha + \gamma'$, etc.

Soit pour ex. l'équation

$$(A) \ldots 0 = x^3y + xy^2 + x^2y^3 + y^8 + x^4y^9 + x^5y^{12}.$$

Les deux premiers termes donnent $\alpha = 2$, et substituant $y = x^2$, il viendra

$$k = 5,\ t = 8,\ t' = 16,\ t'' = 22,\ t''' = 29;\ \text{donc}$$
$$t - k = \tau = 3,\ t' - k = \tau' = 11,\ \tau'' = 17,\ \tau''' = 24;$$

d'où naîtra la série

$$\begin{matrix} 3, & 6, & 9, & 11, & 12, & 14, & 15, & 17, & 18, & 20, & 21, & 22, & 23, & 24, \\ \tau, & 2\tau, & 3\tau, & \tau', & 4\tau, & \tau+\tau', & 5\tau, & \tau'', & 6\tau, & \tau+\tau'', & 7\tau, & 2\tau', & 4\tau+\tau', & 8\tau, \end{matrix}\ \text{etc.}$$

Il en suit

$$\beta' = 3, \gamma' = 6, \delta' = 9, \varepsilon' = 11, \zeta' = 12, \eta' = 14, \theta' = 15, \text{etc. donc}$$
$$\alpha = 2, \beta = 5, \gamma = 8, \delta = 11, \varepsilon = 13, \zeta = 14, \eta = 16, \theta = 17, \text{etc.}$$

Cela posé on substituera, dans l'équation (A),

$$y = Ax^2 + Bx^5 + Cx^8 + Dx^{11} + Ex^{13} + Fx^{14} + Gx^{16} + Hx^{17} + \text{cet.}$$

et on égalera à zéro le coëfficient de chaque puissance de x, ce qui donnera les coëfficiens A, B, C, D, etc.

§. 11. Il est aisé de voir que, si les quantités $0, \tau, \tau', \tau''$, etc. forment une progression arithmétique, les exposans α, β, γ, etc. formeront une progression semblable, la différence entre deux termes consécutifs étant $= \tau$. En effet, τ' étant dans le cas supposé égal à $2\tau, \tau'' = 3\tau, \tau''' = 4\tau$, etc. on aura $\beta' = \tau$, $\gamma' = 2\tau$, $\delta' = 3\tau$, etc. donc $\beta = \alpha + \tau$, $\gamma = \alpha + 2\tau$, $\delta = \alpha + 3\tau$, etc. Il en est de même, lorsque $\tau' = 0$, $\tau'' = 0$, $\tau''' = 0$, etc.

§. 12. Il ne sera pas superflu d'éclaircir ce qui précède, par un ou deux exemples. Soit proposé l'équation

$$0 = z^{\frac{1}{2}} - (z^{\frac{1}{6}} - cz^{\frac{5}{6}})u^{\frac{1}{3}} + (b + dz^{\frac{1}{2}} + fz)u + (ez^{\frac{1}{6}} + gz^{\frac{5}{6}})u^{\frac{5}{3}}.$$

Faisant $z = x^6$, $u = y^3$, cette équation se changera en

$$(A) \ldots 0 = x^3 - xy + cx^5y + by^3 + dx^3y^3 + fx^6y^3 + exy^5 + gx^5y^5.$$

Fig. 7. On aura une première solution par le moyen des deux premiers termes, $0 = x^3 - xy$, qui donnent $y = x^2 = Ax^\alpha$, donc $\alpha = 2$, $A = 1$. Ayant substitué $y = x^2$, et ordonné l'équation (A) suivant les puissances de x, il viendra

$$(B) \ldots 0 = x^3 - xy + by^3 + cx^5y + dx^3y^3 + exy^5 + fx^6y^3 + gx^5y^5,$$

ce qui donne (§. 10.),

$$k = 3,\ t = 6,\ t' = 7,\ t'' = 9,\ t''' = 11,\ t^{\text{iv}} = 12,\ t^{\text{v}} = 15,$$
$$\tau = 3,\ \tau' = 4,\ \tau'' = 6,\ \tau''' = 8,\ \tau^{\text{iv}} = 9,\ \tau^{\text{v}} = 12;$$

d'où il résulte la série

$$3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ \text{etc.}$$

qui renferme tous les nombres entiers depuis 3, excepté le nombre 5. On aura donc

$$\beta' = 3,\ \gamma' = 4,\ \delta' = 6,\ \varepsilon' = 7,\ \text{etc.}$$
$$\alpha = 2,\ \beta = 5,\ \gamma = 6,\ \delta = 8,\ \varepsilon = 9,\ \zeta = 10,\ \text{etc.}$$
$$(C) \ldots y = x^2 + Bx^5 + Cx^6 + Dx^8 + Ex^9 + Fx^{10} + Gx^{11} + Hx^{12} + \text{cet.}$$

ce qui étant substitué dans l'équation (B), donnera

$$\begin{aligned}(D) \ldots 0 = {} & (b - B)x^6 + (c - C)x^7 + (d + 3bB - D)x^9 \\ & + (cB + 3bC - E)\,x^{10} + (e + cC - F)x^{11} \\ & + (f + 3dB + 3bB^2 + 3bD - G)x^{12} \\ & + (3dC + cD + 6bBC + 3bE - H)x^{13} \\ & + (5eB + cE + 3bC^2 + 3bF - K)x^{14} \\ & + (g + 3fB + 5eC + 3dB^2 + 3dD + cF + bB^3 \\ & + 6bBD + 3bG - L)x^{15} + \text{cet.}\end{aligned}$$

d'où il est aisé de conclure,

$$B = b,\ C = c,\ D = 3b^2 + d,\ E = 4bc,\ F = c^2 + e,$$
$$G = 12b^3 + 6bd + f,\ H = 21b^2c + 4cd,\ K = 10bc^2 + 8be,$$
$$L = 55b^4 + 36b^2d + 6bf + c^3 + 6ce + 3d^2 + g.$$

Si on fait $b = c = 2$, $d = 3$, $e = f = 4$, $g = 9$, l'équation

$$0 = x^3 - xy + 2y^3 + 2x^5y + 3x^3y^3 + 4xy^5 + 4x^6y^3 + 9x^4y^5$$

aura pour première racine:

$$y = x^2 + 2x^5 + 2x^6 + 15x^8 + 16x^9 + 8x^{10} + 136x^{11} + 192x^{12} + 144x^{13} + 1452x^{14} + \text{cet.}$$

Une autre solution résultera des termes xy, y^3, ce qui donnera Fig. 7.
$0 = -xy + by^3$, $y^2 = \frac{x}{b}$; d'où on tirera deux racines, $y' = \sqrt{\frac{x}{b}}$, $y'' = -\sqrt{\frac{x}{b}}$, ou faisant $\frac{1}{\sqrt{b}} = n$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $A = \pm n$. La substi-

tution de $y = nx^{\frac{1}{2}}$ changera l'équation (A) en

$$(E) \ldots 0 = -xy + by^3 + x^3 + exy^5 + dx^3y^3 + cx^5y + fx^6y^3 + gx^5y^5,$$

d'où il suit

$$k = \tfrac{3}{2},\ t = 3,\ t' = \tfrac{7}{2},\ t'' = \tfrac{9}{2},\ t''' = \tfrac{11}{2},\ t^{\text{IV}} = \tfrac{15}{2};$$
$$\tau = \tfrac{3}{2},\ \tau' = 2,\ \tau'' = 3,\ \tau''' = 4,\ \tau^{\text{IV}} = 6;$$

ce qui donne la série

$$\beta' = \tfrac{3}{2},\ \gamma' = 2,\ \delta' = 3,\ \varepsilon' = \tfrac{7}{2},\ \zeta' = 4,\ \eta' = \tfrac{9}{2},\ \theta' = 5,\ \text{etc.}$$
$$\alpha = \tfrac{1}{2},\ \beta = 2,\ \gamma = \tfrac{5}{2},\ \delta = \tfrac{7}{2},\ \varepsilon = 4,\ \zeta = \tfrac{9}{2},\ \theta = 5,\ \text{etc.}$$
$$y = nx^{\frac{1}{2}} + Bx^2 + Cx^{\frac{5}{2}} + Dx^{\frac{7}{2}} + Ex^4 + Fx^{\frac{9}{2}} + Gx^5 + Hx^{\frac{11}{2}} + \text{cet.}$$

ce qui étant substitué dans l'équation (E) donnera

$$\begin{aligned}0 = {} & (2B + 1)x^3 + (2C + en^5)x^{\frac{7}{2}} + (2D + 3B^2\sqrt{b} + dn^3)x^{\frac{9}{2}} \\ & + (2E + 6BC\sqrt{b} + 5en^4B)x^5 + (2F + 3C^2\sqrt{b} + 5en^4C + cn)x^{\frac{11}{2}} \\ & + (2G + 6BD\sqrt{b} + bB^3 + 3dn^2B)x^6 \\ & + (2H + 6BE\sqrt{b} + 6CD\sqrt{b} + 3bB^2C + 5en^4D \\ & \qquad + 10en^3B^2 + 3dn^2C)x^{\frac{13}{2}} \\ & + \text{cet.}\end{aligned}$$

De là on conclura

$$B = -\tfrac{1}{2},\ C = -\frac{e}{2b^2\sqrt{b}},\ D = -\frac{3b^2 + 4d}{8b\sqrt{b}},\ E = \frac{e}{2b^2},$$
$$F = \frac{7e^2 - 4b^4c}{8b^4\sqrt{b}},\ G = -\frac{b}{2},\ H = \frac{e(b^2 + 20d)}{16b^3\sqrt{b}}.$$

La seconde racine est donc

$$y = \sqrt{\frac{x}{b}} - \frac{x^2}{2} - \frac{ex^{\frac{5}{2}}}{2b^2\sqrt{b}} - \frac{3b^2 + 4d}{8b\sqrt{b}}x^{\frac{7}{2}} + \frac{ex^4}{2b^2} + \frac{7e^2 - 4b^4c}{8b^4\sqrt{b}}x^{\frac{9}{2}} - \frac{b}{2}x^5 + \frac{e(b^2 + 20d)}{16b^3\sqrt{b}}x^{\frac{11}{2}} + \text{cet.}$$

On trouvera la troisième racine y'', en prenant $\sqrt{b}$ négativement, ce qui donnera

$$y'' = -\sqrt{\frac{x}{b}} - \frac{x^2}{2} + \frac{ex^{\frac{5}{2}}}{2b^2\sqrt{b}} + \frac{3b^2 + 4d}{8b\sqrt{b}}x^{\frac{7}{2}} + \frac{ex^4}{2b^2} + \frac{4b^4c - 7e^2}{8b^4\sqrt{b}}x^{\frac{9}{2}} - \frac{b}{2}x^5 - \frac{e(b^2 + 20d)}{16b^3\sqrt{b}}x^{\frac{11}{2}} + \text{cet.}$$

Fig. 7. La dernière solution naîtra des termes y^3, xy^5, qui donnent l'équation $0 = by^3 + exy^5$, d'où il vient $y^2 = -\frac{b}{ex}$. Les deux

racines y''', y^{IV}, qui en résultent, sont imaginaires, lorsque b, e, sont affectés du même signe, x étant supposé positif. Mais si b est négatif, et qu'on fasse pour abréger, $\sqrt{\frac{b}{e}} = m$, on aura $y = \pm \frac{m}{\sqrt{x}}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{A} = \pm m$. Si on substitue $y = \frac{m}{\sqrt{x}}$, l'équation (A) deviendra

$$(\mathrm{F}) \ldots 0 = -by^3 + exy^5 - xy + dx^3y^3 + gx^5y^5 + x^3 + cx^5y + fx^6y^3,$$

d'où il vient

$$k = -\tfrac{3}{2},\ t = \tfrac{1}{2},\ t' = \tfrac{3}{2},\ t'' = \tfrac{5}{2},\ t''' = 3,\ t^{\text{IV}} = \tfrac{9}{2};$$
$$\tau = 2,\ \tau' = 3,\ \tau'' = 4,\ \tau''' = \tfrac{9}{2},\ \tau^{\text{IV}} = 6:$$

ce qui donne la série,

$$\beta' = 2,\ \gamma' = 3,\ \delta' = 4,\ \varepsilon' = \tfrac{9}{2},\ \zeta' = 5,\ \eta' = 6,\ \theta' = \tfrac{13}{2},\ \text{etc.}$$
$$\beta = \tfrac{3}{2},\ \gamma = \tfrac{5}{2},\ \delta = \tfrac{7}{2},\ \varepsilon = 4,\ \zeta = \tfrac{9}{2},\ \eta = \tfrac{11}{2},\ \theta = 6,\ \text{etc.}$$

Substituant

$$y''' = \frac{m}{x^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{B}x^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}x^{\frac{5}{2}} + \mathrm{D}x^{\frac{7}{2}} + \mathrm{E}x^{4} + \mathrm{F}x^{\frac{9}{2}} + \text{cet.}$$

l'équation (F) se changera en

$$0 = \left(\frac{2b^2}{e}\mathrm{B} - m\right)x^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2b^3}{e}\mathrm{C} + dm^3\right)x^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{2b^2}{e}\mathrm{D} + 7bm\mathrm{B}^2 - \mathrm{B} + gm^5\right)^{\frac{5}{2}}$$
$$+ \left(\frac{2b^2}{e}\mathrm{E} + 1\right)x^3 + \left(\frac{2b^2}{e}\mathrm{F} + 14bm\,\mathrm{BC} - \mathrm{C} + 3dm^2\mathrm{B}\right)x^{\frac{7}{2}} + \text{cet.}$$

d'où on tirera

$$\mathrm{B} = \frac{\sqrt{e}}{2b\sqrt{b}},\ \mathrm{C} = -\frac{d}{2\sqrt{be}},\ \mathrm{D} = -\frac{5e\sqrt{e}}{8b^3\sqrt{b}} - \frac{g\sqrt{b}}{2e\sqrt{e}},$$
$$\mathrm{E} = -\frac{e}{2b^2},\ \mathrm{F} = \frac{3d\sqrt{e}}{4b^2\sqrt{b}},\ \text{etc.}$$

La quatrième racine est donc

$$y''' = \sqrt{\frac{b}{ex}} + \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{ex^3}{b}} - \frac{d}{2}\sqrt{\frac{x^6}{be}} - \left(\frac{5e\sqrt{e}}{8b^3\sqrt{b}} + \frac{g\sqrt{b}}{2e\sqrt{e}}\right)x^{\frac{7}{2}}$$
$$- \frac{ex^4}{2b^2} + \frac{3d}{4b^2}\sqrt{\frac{ex^9}{b}} + \text{cet.}$$

Prenant $\sqrt{\frac{b}{e}}$ négativement, on aura la cinquième racine

$$y^{\text{IV}} = -\sqrt{\frac{b}{ex}} - \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{ex^3}{b}} + \frac{d}{2}\sqrt{\frac{x^6}{be}} + \left(\frac{5e\sqrt{e}}{8b^3\sqrt{b}} + \frac{g\sqrt{b}}{2e\sqrt{e}}\right)x^{\frac{7}{2}} - \frac{ex^4}{2b^2} - \text{cet.}$$

Ainsi nous avons trouvé les cinq racines, dont l'équation proposée est susceptible, puisqu'elle est du cinquième degré par rapport à y.

§. 13. Je donnerai encore un exemple, pour le cas du §. 11. Soit proposée l'équation

(A) ... $0 = x^5 + ax^4y^2 - by^4 + cx^3y^4 + dx^2y^6 + exy^8$.

Comme c'est une équation du quatrième degré en y^2, nous ne trouverons que quatre valeurs de y^2, dont les négatives donneront des racines imaginaires y. Si suivant la règle précédente (§. 8.), on égale l'exposant du premier terme à celui de chacun des autres termes, on trouvera ces valeurs de α:

$\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$,

dont la plus grande, $\frac{5}{4}$, résulte de l'équation $0 = x^5 - by^4$; d'où $y^2 = \pm \sqrt{\frac{x^5}{b}}$, $\alpha = \frac{5}{4}$, $A = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{b}} = \pm n$. L'équation (A) ordonnée suivant les puissances de x, prendra la forme

(B) .... $0 = x^5 - by^4 + ax^4y^2 + cx^3y^4 + dx^2y^6 + exy^8$, d'où
$k = 5$, $t = \frac{13}{2}$, $t' = 8$, $t'' = \frac{19}{2}$, $t''' = 11$;
$\tau = \frac{3}{2}$, $\tau' = 3 = 2\tau$, $\tau'' = \frac{9}{2} = 3\tau$, $\tau''' = 6 = 4\tau$: donc (§. 11.)
$\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = \alpha + \tau = \frac{11}{4}$, $\gamma = \alpha + 2\tau = \frac{17}{4}$, $\delta = \frac{23}{4}$, $\varepsilon = \frac{29}{4}$, etc.

Il y a donc deux racines imaginaires, résultant de $y^2 = -\sqrt{\frac{x^5}{b}}$, et deux racines réelles,

$$y = nx^{\frac{5}{4}} + Bx^{\frac{11}{4}} + Cx^{\frac{17}{4}} + Dx^{\frac{23}{4}} + Ex^{\frac{29}{4}} + Fx^{\frac{35}{4}} + \text{cet.}$$

$y' = -y$. On trouvera par la méthode des coëfficiens indéterminés,

$$B = \frac{a}{4bn},\quad C = \frac{(a^2+8c)n}{32b},\quad D = \frac{32d + 24ac - a^3}{128b^2n},$$

$$E = \frac{(512e + 640ad + 320c^2 + 80a^2c - 5a^4)n}{2048b^2},$$

$$F = \frac{7}{16b^3n}\left(\frac{a^5}{512} - \frac{a^3c}{32} + \frac{3a^2d}{8} + \frac{3ac^2}{8} + ae + cd\right),$$

$$G = \frac{3n}{16b^3}\left(\frac{7a^6}{4096} - \frac{15a^4c}{512} + \frac{5a^3d}{32} + \frac{15a^2c^2}{64} + \frac{15a^2e}{8} + \frac{15acd}{4} + \frac{5c^3}{8} + 3ce + \frac{3}{2}d^2\right).$$

Si on compare maintenant le terme y^4 de l'équation (A) avec les termes suivans (§. 8.), on trouvera que le dernier xy^8, donnera la plus grande valeur de α, savoir $\alpha = -\frac{1}{4}$, le terme x^2y^6

donnant $\alpha = -1$. On aura donc l'équation $0 = -by^4 + exy^8$, d'où il vient $y^4 = \frac{b}{ex}$, $y^2 = \pm\sqrt{\frac{b}{ex}}$; ce qui donne deux valeurs imaginaires de y, et deux valeurs réelles,

$$y = \pm\sqrt[4]{\frac{b}{ex}},\quad \alpha = -\tfrac{1}{4},\quad A = \pm\sqrt[4]{\frac{b}{e}} = \pm m.$$

Ayant ordonné l'équation (A), il viendra

$$(C)\ldots 0 = -by^4 + exy^8 + dx^2y^6 + cx^3y^4 + ax^4y^2 + x^5;$$

$$k = -1,\ t = \tfrac{1}{2},\ t' = 2,\ t'' = \tfrac{7}{2},\ t''' = 5;$$

$$\tau = \tfrac{3}{2},\ \tau' = 3 = 2\tau,\ \tau'' = \tfrac{9}{2} = 3\tau,\ \tau''' = 6 = 4\tau:$$

$$\alpha = -\tfrac{1}{4},\ \beta = \alpha + \tau = \tfrac{5}{4},\ \gamma = \alpha + 2\tau = \tfrac{11}{4},\ \delta = \tfrac{17}{4},\ \text{etc.}$$

ce qui donne les deux racines réelles,

$$y''' = mx^{-\frac{1}{4}} + Bx^{\frac{5}{4}} + Cx^{\frac{11}{4}} + Dx^{\frac{17}{4}} + Ex^{\frac{23}{4}} + Fx^{\frac{29}{4}} + \text{cet.}$$

et $y^{\text{IV}} = -y'''$. On trouvera

$$B = -\frac{d}{4em},\ C = \frac{m}{4b}\left(\frac{d^2}{8e} - c\right),\ D = \frac{1}{4bm}\left(\frac{d^3}{32e^2} - \frac{cd}{4e} - a\right),$$

$$E = -\frac{m}{4b^2}\left(\frac{5d^4}{512e^2} - \frac{3cd^2}{32e} + \tfrac{3}{4}ad + \tfrac{3}{8}c^2 + e\right),$$

$$F = -\frac{1}{16b^2m}\left(\frac{7d^6}{512e^2} - \frac{5cd^3}{32e^2} + \frac{5ad^2}{8e} + \frac{5c^2d}{8e} + 5ac + 5d\right).$$

II.

DE LA SOMMATION DES SUITES.

Présenté le 7 Janvier 1824.

§. 1. Une des parties les plus importantes de l'analyse est sans doute celle qui a pour objet la sommation des suites, et le moindre progrès de cette partie ne saurait être sans intérêt. Le célèbre *Euler* a donné la forme et les coëfficiens du *terme sommatoire* du premier ordre d'une suite quelconque, dont le *terme général* est une fonction donnée de son *index*, ou de la place qu'il occupe dans la série (*Instit. Calc. Differ. Pars II, Cap. V.*). Je vais m'occuper à développer la loi de ces coëfficiens, ainsi que la somme des sommes, ou le terme sommatoire d'un ordre quelconque. Pour cet effet je désignerai constamment l'*index* des termes d'une suite proposée par x, le *terme général* par u, la *somme* des x premiers termes par Su, l'*intégrale aux différences*, ou la fonction primitive, dont la *différence* est u, par Σu, pour la distinguer d'avec l'*intégrale aux différentielles*, qui a le signe $\int$; la somme ou l'intégrale de l'ordre m sera désignée par $S^m u$, $\Sigma^m u$, $\int^m u \partial x^m$, de sorte que p. ex.

$$\int^3 u \partial x^3 = \int \partial x \int u \partial x^2 = \int \partial x \int \partial x \int u \partial x,$$

et $S^3 u$ sera la somme des x premiers termes de la série $S^2 u$, sommatrice de Su, dont le terme général est le terme sommatoire de la suite proposée, qui a u pour terme général. Je supposerai que u est une fonction donnée de x, de manière que les règles vulgaires du calcul différentiel et intégral donneront les fonctions $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial \partial u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^m u}{\partial x^m}$, $\int u \partial x$, $\int^2 u \partial x^2$, $\int^m u \partial x^m$. Puisque u est la différence

de l'intégrale Σu, il en résulte l'équation

$$(1) \ldots\ldots Su = \Sigma u + u.$$

§. 2. Lorsque u est une fonction quelconque de x, et que $h = \Delta x$ soit la différence ou l'accroissement constant de l'*index* x, en passant d'un terme au consécutif, Σu est donné par l'équation

$$(A) \ldots \Sigma u = \frac{1}{h}\int u\partial x - \frac{u}{2} + Ah\frac{\partial u}{\partial x} + Bh^2\frac{\partial\partial u}{\partial x^2} + \ldots + Rh^r\frac{\partial^r u}{\partial x^r}.$$

Les coëfficiens A, B, etc. étant indépendans de x et de h, le développement d'une fonction quelconque u, dont l'intégrale Σu est connue, servira à les déterminer. Mais le moyen le plus simple paraît de supposer

$$\Sigma u = \frac{e^x}{e^h - 1},$$

e étant le nombre, dont le logarithme naturel est l'unité. Cela donne

$$u = \Delta\Sigma u = \frac{e^{x+h} - e^x}{e^h - 1} = \frac{e^x(e^h - 1)}{e^h - 1} = e^x.$$

Cela posé on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\partial u}{\partial x^2} = \ldots = \frac{\partial^m u}{\partial x^m} = e^x = u, \int u\partial x = u, \text{ donc } \int^m u\partial x^m = u.$$

Divisant l'équation (A) par $u = e^x$, et substituant $\Sigma u = \frac{e^x}{e^h - 1}$, on aura

$$(a) \ldots \frac{1}{e^h - 1} = \frac{1}{h} - \frac{1}{2} + Ah + Bh^2 + \ldots + Rh^r.$$

Or on sait que $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2.3} +$ cet. ou

$$e^h - 1 = h\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{2.3} + \ldots + \frac{h^r}{1.2\ldots(r+1)}\right).$$

Faisant donc

$$(2) \ldots\ldots \frac{h}{2} + \frac{h^2}{2.3} + \ldots + \frac{h^r}{1.2\ldots(r+1)} = H,$$

on aura

$$(3) \ldots\ldots e^h - 1 = h(1 + H).$$

Ainsi l'équation (a), multipliée par h, donnera

$\frac{1}{1+H} = 1 - \frac{h}{2} + Ah^2 + Bh^3 + \ldots + Rh^{r+1}$. Mais $\frac{1}{1+H} = 1 - H + H^2 - H^3 +$ cet. ce qui donne

$$H - H^2 + H^3 - H^4 + \text{cet.} = \frac{h}{2} - Ah^2 - Bh^3 - \text{cet.}$$

Désignant le coëfficient de h^n dans la dernière série, ou de $\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}$ dans la série (A), par $L^{(n)}$, ensorte que $A = L^{(2)}$, $B = L^{(3)}$, etc. la dernière équation se changera en

$$(B)\ldots L^{(2)}h^2 + L^{(3)}h^3 + \ldots + L^{(n)}h^n = \frac{h}{2} - H + H^2 - H^3 + \text{cet.}$$

§. 3. L'équation (a), multipliée par h, donne

$$(b)\ldots \frac{h}{e^h - 1} + \frac{h}{2} = 1 + L^{(2)}h^2 + L^{(3)}h^3 + L^{(4)}h^4 + L^{(5)}h^5 + \text{cet.}$$
$$= \frac{h(e^h + 1)}{2(e^h - 1)},$$

et donnant à h une valeur négative,

$$(c)\ldots \frac{h}{1 - e^{-h}} - \frac{h}{2} = 1 + L^{(2)}h^2 - L^{(3)}h^3 + L^{(4)}h^4 - L^{(5)}h^4 + \text{cet.}$$
$$= \frac{h(1 + e^{-h})}{2(1 - e^{-h})}.$$

Mais $\frac{1 + e^{-h}}{1 - e^{-h}} = \frac{e^h + 1}{e^h - 1}$, donc $(c) = (b)$, d'où il suit

$$0 = L^{(3)}h^3 + L^{(5)}h^5 + L^{(7)}h^7 + \text{cet.}$$

c'est-à-dire, les coëfficiens de toutes les puissances de h d'un exposant impair sont nuls. Cela change l'équation (B) en

$$(C)\ldots L^{(2)}h^2 + L^{(4)}h^4 + \ldots + L^{(n)}h^n = \frac{h}{2} - H + H^2 - H^3 + \text{cet.}$$

n étant un nombre pair. Ainsi, dans le développement de H, H^2, etc. on ne prendra que les puissances de h, qui ont un exposant pair, et l'équation (A) (§. 2.) donnera

$$(D)\ldots \Sigma u = \int u\partial x - \frac{u}{2} + L^{(2)}\frac{\partial u}{\partial x} + L^{(4)}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \ldots + L^{(2r)}\frac{\partial^{2r-1}u}{\partial x^{2r-1}};$$

parcequ'en appliquant cette équation aux suites on a l'accroissement de l'*index*, ou $h = 1$.

§. 4. Faisons pour abréger,

$$(d)\ldots \frac{h}{2} = [1],\ \frac{h^2}{2.3} = [2],\ \frac{h^m}{1.2\ldots(m+1)} = [m],$$

H étant $= [1] + [2] + \ldots . + [m]$ (§. 2.) (2). Le développemen d'un polynome quelconque H^λ a pour terme général,

$$H^\lambda = \frac{1.2.3\ldots\lambda}{\mu}[1]^{p_1}[2]^{p_2}\ldots[m]^{p_m},$$

la somme des exposans $p_1 + p_2 + \ldots + p_m$ étant $= \lambda$, et μ désignant le produit des facteurs $1.2\ldots p_1$, $1.2\ldots p_2, \ldots$, $1.2\ldots . p_m$. Comme $[m]$ est multiplié par h^m, et par conséquent $[m]^{p_m}$ par h^{mp_m}, la somme $p_1 + 2p_2 + \ldots + mp_m$ sera l'exposant de h dans le terme général H^λ. Faisant donc, pour abréger,

$$\frac{1.2.3\ldots.\lambda}{1.2\ldots p_1 \times 1.2\ldots p_2 \times 1.2\ldots . p_n} = \eta,$$

le coëfficient de h^n dans le développement de H^λ sera

$$(E)\ldots . L_\lambda^{(n)} = \frac{\eta}{h^n}[1]^{p_1}[2]^{p_2}\ldots[m]^{p_n},$$

où l'on doit satisfaire aux deux conditions suivantes :

$$(4)\ldots . p_1 + p_2 + \ldots . + p_m = \lambda,$$
$$(5)\ldots . p_1 + 2p_2 + \ldots . + mp_m = n.$$

Si p. ex. $\lambda = 1$, la condition (4) donnera $p_m = 1$, tous les autres exposans p étant nuls : on a donc, à cause de (5), $m.1 = n$, ou $m = n$, ce qui donne $1.2\ldots.\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\eta = 1$, donc

$$(E)\ldots L_1^{(n)} = [n] = \frac{1}{1.2\ldots(n+1)}.$$

§. 5. En général la condition (4) présente les cas suivans,

$$1)\ p_m = \lambda,\quad 2)\ p_m + p_{m'} = \lambda,\quad 3)\ p_m + p_{m'} + p_{m''} = \lambda, \text{ etc.}$$

et la condition (5) donne pour ces différens cas, 1) $m\lambda = n$ ou $m = \frac{n}{\lambda}$, 2) $mp_m + m'(\lambda - p_m) = n$, 3) $mp_m + m'p_{m'} + m''(\lambda - p_m - p_{m'}) = n$, etc.

On a donc

$$1)\ m = \frac{n}{\lambda},\ p_m = \lambda,\ \eta = 1,\ L_\lambda^{(n)} h^n = [\tfrac{n}{\lambda}]^\lambda = \left[\frac{1}{1.2\ldots(\frac{n}{\lambda}+1)}\right]^\lambda;$$

$$2)\ p_m = 1,\ p_{m'} = \lambda - 1,\ \eta = \frac{1.2\ldots\lambda}{1.2\ldots(\lambda-1)} = \lambda,\ L_\lambda^{(n)} h^n = \lambda[m][m']^{\lambda-1},$$

m, m', désignant tous les nombres entiers et positifs qui satisfont à la condition (5), $m + (\lambda - 1)m' = n$. Si on fait $p_m = 2$,

on aura

$$p_{m'} = \lambda - 2,\ \eta = \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2},\ L_\lambda^{(n)} h^n = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}[m]^2[m']^{\lambda-2},$$

$2m + (\lambda - 2)m'$ étant $= n$. Dans le cas 3) on a $p_m = 1$, $p_{m'} = 1, p_{m''} = \lambda - 2$, ou $p_m = 1, p_{m'} = 2, p_{m''} = \lambda - 3$, etc. donc $\eta = \lambda(\lambda-1)$ ou $\eta = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2}$, etc. et

$$L_\lambda^{(n)} h^n = \lambda(\lambda-1)[m][m'][m'']^{\lambda-2}$$

ou $= \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{2}[m][m']^2[m'']^{\lambda-3}$. En poursuivant le même procédé on trouvera la formule suivante:

$$\text{(F)} \ldots\ L_\lambda^{(n)} = [\tfrac{n}{\lambda}]^\lambda + \lambda[m][\tfrac{n-m}{\lambda-1}]^{\lambda-1}$$
$$+ \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}[m]^{\lambda-2}\{[\tfrac{n-(\lambda-2)m}{2}]^2 + 2[m'][n-(\lambda-2)m-m']\} + \ldots$$
$$+ \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha}[m]^{\lambda-\alpha}([\tfrac{n-(\lambda-\alpha)m}{\alpha}]^\alpha + \alpha[m']^{\alpha-1}[m'']$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}[m']^{\alpha-2}\{[m'']^2 + 2[m''][m''']\} + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1)}{1.2\ldots\beta}[m']^{\alpha-\beta}\left\{\begin{array}{l}[m'']^\beta + \beta[m'']^{\beta-1}[m'''] + \ldots \\ + \beta(\beta-1)\ldots2.1[m''][m'''][m^{IV}]\ldots\end{array}\right\} + \ldots$$
$$+ \alpha(\alpha-1)\ldots2.1.[m'][m''][m''']\ldots[m^\alpha] + \ldots$$
$$+ \lambda(\lambda-1)\ldots2.1.[m][m'][m'']\ldots[m^\lambda].$$

§. 6. A l'égard du coëfficient précédent il faut observer ce qui suit :

1. La combinaison des nombres $[m]$, $[m']$, etc. doit être telle, que la somme des produits qui résultent de la multiplication de chaque nombre $[m]$ par son exposant, soit $= n$. Ainsi p. ex. pour le terme $[m]^{\lambda-\alpha}[m']^{\alpha-3}[m'']^2[m''']$, il faut que

$$(\lambda - \alpha)m + (\alpha - 3)m' + 2m'' + m''' \text{ soit } = n.$$

2. Tous ces nombres devant être entiers, les termes $[\frac{n}{\lambda}]^\lambda$, $[\frac{n-(\lambda-2)m}{2}]^2$, etc. seront exclus, si n n'est pas divisible par λ, ou $n - \lambda m$ par 2.

3. On ne doit pas faire α plus grand que $n-\lambda=\nu$. Car si on suppose $\alpha=\nu+\beta$, le terme général de $L^{(n)}_{\lambda}$, abstraction faite des coëfficiens, deviendra

$$[m]^{n-2\nu-\beta}\{[m']^{\nu+\beta}+[m']^{\nu+\beta-1}[m'']\}+\text{cet.}$$

Le premier terme donne

$(n-2\nu-\beta)m+(\nu+\beta)m'=n$, d'où $m=\frac{n-(\nu+\beta)m'}{n-2\nu-\beta}$, et $m'=1$, parceque, si on faisait $m'>1$, m serait moindre que l'unité: on a donc $m=1+\frac{\nu}{n-2\nu-\beta}$, et $\frac{\nu}{n-2\nu-\beta}$ égal à un nombre entier r, ce qui donne $\beta=n-2\nu-\frac{\nu}{r}$, et $L^{(n)}_{\lambda}=\ldots[m]^{\frac{\nu}{r}}[m']^{n-\frac{r+1}{r}\nu}$ doit se trouver déjà parmi les termes précédens, attendu qu'ils s'étendent depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=\nu$, c'est-à-dire depuis

$$[m]^{\lambda}=[m]^{n-\nu} \text{ jusqu'à } [m]^{n-2\nu}[m']^{\nu}.$$

Le second terme donne $m=\frac{n-(\nu+\beta-1)m'-m''}{n-2\nu-\beta}$. Or quelque valeur qu'on attribue à m, excepté l'unité, n aura une valeur déterminée, qui est susceptible du terme qu'on cherche: d'où il suit qu'il est déjà renfermé dans le terme général. Il faut donc supposer $m=1$, d'où il suit que m' et m'', étant différens de m, seront au moins $=2$. Posant donc $m'=2+r$, $m''=2+s$, r ou s pouvant aussi être nul, on aura

$$(\nu+\beta-1)(2+r)+2+s=2\nu+\beta, \text{ ou}$$
$$(1+r)\beta+(\nu-1)r+s=0,$$

ce qui est impossible, parcequ'aucun de ces trois termes ne peut devenir négatif. Il en est de même des termes suivans de $L^{(n)}_{\lambda}$. Ainsi $\beta=0$, et la suite (F) ne sera continuée que jusqu'à $\alpha=n-\lambda$, ou jusqu'au terme $[m]^{2\lambda-n}$ ce qui suppose $\lambda>\frac{n}{2}$. Cela posé le dernier terme de H^{λ} ou $H^{n-\nu}$ sera

$$\frac{(n-\nu)(n-\nu-1)\ldots(n-2\nu+1)}{1.2\ldots\ldots\nu}[m]^{n-2\nu}[m']^{\nu},$$

les termes suivans étant impossibles par ce qui précède. Cela

donne $m = \frac{n - \nu m'}{n - 2\nu}$, d'où il suit $m = 1$, $m' = 2$, et le terme final

$$\frac{(n-\nu)(n-\nu-1)\ldots(n-2\nu+1)}{1.2\ldots\nu}[1]^{n-2\nu}[2]^{\nu} = z.$$

4. Le premier terme $[\frac{n}{\lambda}]^{\lambda}$, est toujours renfermé dans les termes suivans. En effet $\frac{n}{\lambda}$ ne peut pas être un nombre entier si λ surpasse $\frac{n}{2}$: ainsi le terme $(\frac{n}{\lambda})^{\lambda}$ ne pourra pas avoir lieu, à moins que 2λ ne soit plus petit que $n+1$, ou $\lambda < n - \lambda + 1$, c'est-à-dire, $\lambda < \nu + 1$. Or les termes suivans s'étendant jusqu'à $\alpha = \nu$, et par conséquent jusqu'à $\alpha = \lambda$, on aura alors $\alpha - \lambda = 0$, et le terme général de $L^{(n)}_{\lambda}$ (F) donne pour ce cas

$$\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots\lambda}.[m]^{0}[m']^{\lambda} = [m']^{\lambda} = M.$$

Il en suit $\lambda m' = n$, $m' = \frac{n}{\lambda}$, et $L^{(n)}_{\lambda}\lambda = [\frac{n}{\lambda}]^{\lambda}$. Dans le même cas, où $\lambda = \frac{n}{2}$, on s'arrêtera au terme, das lequel $\alpha = \lambda$, et le terme final, au lieu du précédent z, sera

$$z' = [\tfrac{n}{\lambda}]^{\lambda} + \lambda[m]^{\lambda-1}[m'] + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}[m]^{\lambda-2}\{[m']^{2} + 2[m'][m'']\}$$
$$+ \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2.3}[m]^{\lambda-3}\{[m']^{3} + 3[m']^{2}[m''] + 6[m'][m''][m''']\} + \ldots$$
$$+ \lambda(\lambda-1)\ldots 2.1[m][m']\ldots[m^{\lambda}].$$

5. Cela posé il est visible que, sans omettre aucun cas, on peut supposer $[m] = [1]$, parceque le terme z' renferme tous les cas, où $[m]$ n'est pas $= [1]$. Ainsi le terme général de $L^{(n)}_{\lambda}$, abstraction faite des coëfficiens, aura la forme

$$[1]^{r}\{[2]^{s} + s[2]^{s-1}[3] + \text{cet.}\},$$

$r + s$ étant $= \lambda = n - \nu$. La partie de ce terme, qui renferme la puissance de h la moins élevée, est $[1]^{r}[2]^{s}$, et $r + 2s$ doit être $= n$, ou $s = \frac{n-r}{2}$; ce qui étant combiné avec la valeur précédente de $s = n - \nu - r$, donnera $r = n - 2\nu$. On s'arrêtera donc au terme $[1]^{n-2\nu}[2]^{\nu}$.

§. 7. Il suit de ce qui précède, que le terme qui est multiplié par h^n, dans le développement de H^λ ou $H^{n-\nu}$, est

$$(G) \ldots . L_\lambda^{(n)} = (n-\nu)[1]^{n-\nu-1}[\nu+1]$$
$$+ \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{1.2}[1]^{n-\nu-2}\{[\tfrac{\nu+2}{2}]^2 + 2[2][\nu] + 2[3][\nu-1] + \text{cet.}\}$$
$$+ \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)(n-\nu-2)}{1.2.3}[1]^{n-\nu-3}\{[\tfrac{\nu+3}{2}]^3 + 3[m]^2[m'] + 3.2.[m][m'][m'']\}$$
$$+ \text{cet.}$$

la suite étant terminée par le terme, dans lequel l'exposant de [1] est zéro ou $n-2\nu$. Si λ ou $n-\nu$ est $=1$, le coëfficient de h^n dans le développement de H est $=$

$$1.[1]^0[n-1+1] = [n] = \frac{1}{1.2\ldots(n+1)},$$

par le premier terme, tous les autres étant multipliés par $n-\nu-1=0$. Si $\lambda = n$, $L_n^{(n)}$ sera $H^n = [1]^n = \frac{1}{2^n}$. Si on fait successivement $\nu = 1$, $\nu = 2$, etc. ou $\lambda = n-1$, $\lambda = n-2$, jusqu'à $\lambda = 2$, en observant qu'il faut s'arrêter, lorsque l'exposant de [1] est nul ou $n-2\nu$, la formule (G) donnera

$$(6)\ldots\begin{cases} L_n^{(n)} = [1]^n,\ L_{n-1}^{(n)} = (n-1)[1]^{n-2}[2], \\ L_{n-2}^{(n)} = (n-2)[1]^{n-3}[3] + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}[1]^{n-4}[2]^2, \\ L_{n-3}^{(n)} = (n-3)[1]^{n-4}[4] + (n-3)(n-4)[1]^{n-5}[2][3] \\ \qquad + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}[1]^{n-6}[2]^3, \\ L_{n-4}^{(n)} = (n-4)[1]^{n-5}[5] + \frac{(n-4)(n-5)}{1.2}[1]^{n-6}\{[3]^2 + 2[2][4]\} \\ \qquad + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2}[1]^{n-7}[2]^2[3] + \frac{(n-4)\ldots(n-7)}{1.2.3.4}[1]^{n-8}[2]^4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_2^{(n)} = 2[1][n-1] + [\tfrac{n}{2}]^2 + 2[2][n-2] + 2[3][n-3] \\ \qquad + \ldots + 2[\tfrac{n}{2}-1][\tfrac{n}{2}+1], \\ L_1^{(n)} = [n],\ L_0^{(n)} = 0. \end{cases}$$

La somme de toutes les quantités précédentes (6), $L_1^{(n)} + L_2^{(n)} + \ldots + L_n^{(n)}$, donnera le terme total $L_1^{(n)}$ qui est multiplié par h^n.

§. 8. Cela posé l'équation (C) (§. 3.) deviendra

$$L^{(n)} = L^{(n)}_{n} - L^{(n)}_{n-1} + L^{(n)}_{n-2} - L^{(n)}_{n-3} + \ldots + L^{(n)}_{2} - L^{(n)}_{1}, \text{ ou}$$

$$(H) \ldots L^{(n)} = \frac{1}{2^n} - \frac{n-1}{2^{n-1}.3} - \frac{1}{1.2\ldots(n+1)} + L^{(n)}_{n-2} - {}^{(n)}_{n-3} + \ldots + L^{(n)}_{2},$$

La formule (H) servira à calculer chaque coëfficient $L^{(n)}$, indépendamment de ceux qui le précèdent. Elle donnera à l'aide des valeurs (6),

$$(7) \ldots \left\{ \begin{array}{l} L^{(2)} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2.3}, \\ L^{(4)} = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2^2.3^2} = -\frac{1}{1.2\ldots6}, \\ L^{(6)} = \frac{1}{2^6} - \frac{5}{2^5.3} - \frac{1}{1.2\ldots7} + 4\,[1]^3\,[3] + 6\,[1]^2\,[2]^2 \\ \quad - 3\,[1]^2\,[4] - 6\,[1]\,[2]\,[3] - [2]^3 + 2\,[1]\,[5] \\ \quad\quad + [3]^2 + 2\,[2]\,[4] = \frac{1}{2^4.3^3.5.7}, \\ L^{(8)} = \frac{1}{2^8} - \frac{7}{2^7.3} - \frac{1}{1.2\ldots9} \\ \quad + L^{(8)}_{6} - L^{(8)}_{5} + L^{(8)}_{4} - L^{(8)}_{3} + L^{(8)}_{2} = -\frac{1}{2^8.3^3.5^2.7}, \\ L^{(10)} = \frac{1}{2^{10}} - \frac{3}{2^9} - \frac{1}{1.2\ldots11} + L^{(10)}_{8} - L^{(10)}_{7} + L^{(10)}_{6} \\ \quad - L^{(10)}_{5} + L^{(10)}_{4} - L^{(10)}_{3} - L^{(10)}_{2} = \frac{1}{2^9.3^4.5.7.11}. \end{array} \right.$$

On conclura de la même manière les nombres $L^{(12)}$, $L^{(14)}$, etc. qu'on trouve dans l'ouvrage cité (§. 130.).

§. 9. Tous les coëfficiens $L^{(2)}, L^{(4)}, \ldots L^{(2r)}$, étant ainsi connus, l'équation (D) (§. 3) donnera Σu, et en vertu de (1)(§ 1),

$$(K) \ldots . Su = \int u \partial x + \frac{u}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{1.2\ldots6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + L^{(6)} \cdot \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + L^{(8)} \frac{\partial^7 u}{\partial x^7} + \text{cet.}$$

Passons maintenant aux sommes d'un ordre supérieur.

§. 10. L'intégrale aux différences d'un ordre quelconque m a la forme

$$(L) \ldots \Sigma^m u = \frac{1}{h^m} \int^m u \partial x^m + \frac{A}{h^{m-1}} \int^{m-1} u \partial x^{m-1}$$
$$+ \ldots + \frac{M}{h} \int u \partial x + N u + P h \frac{\partial u}{\partial x} + \text{cet.}$$

et il s'agit de déterminer les coëfficiens A, B, etc. Pour cela on fera, comme précédemment, $u = e^x$, ce qui donne $\frac{\partial^m u}{\partial x^m} = u$, $\int^m x \partial x^m = u$, et $\Sigma u = \frac{u}{e^h - 1}$ (§. 2.), ou faisant pour abréger, $\frac{1}{e^h - 1} = a$, $\Sigma u = au$, donc $\Sigma^2 u = \Sigma a u = a \Sigma u = a^2 u$, et $\Sigma^m u = a^m u$.

Divisant donc l'équation (L) par u, il viendra

$$a^m = \frac{1}{h^m} + \frac{A}{h^{m-1}} + \frac{B}{h^{m-2}} + \ldots + \frac{M}{h} + N + P h + \text{cet.}$$

Mais l'équation (3) (§. 2.) donne $a^m = \frac{(1+H)^{-m}}{h^m}$, donc

$$h^m a^m = 1 - mH + \frac{m(m+1)}{1.2} H^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} H^3 + \text{cet.}$$

Cela donne

$$1 + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots$$
$$= 1 - mH + \frac{m(m+1)}{1.2} H^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} H^3 + \text{cet.}$$

d'où, à cause de $H = [1] + [2] + \text{cet.}$ (§. 4.), et $h = 1$, on tirera

$$A = -m[1], \quad B = -m[2] + \frac{m(m+1)}{1.2} [1]^2,$$
$$C = -m[3] + m(m+1)[1][2] - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} [1]^3,$$

et désignant généralement par $N^{(n)}$ le coëfficient de $\int^{m-n} u \partial x^{m-n}$ dans la série (L),

$$(M) \ldots N^{(n)} = -m[n] + \frac{m(m+1)}{1.2} L_2^{(n)} - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} L_3^{(n)} + \ldots$$
$$\mp \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)} L_{n-1}^{(n)} \pm \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} [1]^n,$$

le signe supérieur ayant lieu, lorsque n est un nombre pair, et l'inférieur, si n est impair. Les quantités $L_2^{(n)}$, $L_3^{(n)}$, etc. ont été données plus haut (§. 7. 8.), et on doit observer que, lorsque $m - n$ est négatif, $\int^{m-n} u \partial x^{m-n}$ se change en $\frac{\partial^{n-m} u}{\partial x^{n-m}}$, et en u, si $m - n$ est nul.

§. 11. Les formules précédentes donnent, à l'aide des valeurs (*d*).

$$(e) \ldots \begin{cases} A = N^{(1)} = -\frac{m}{2},\ B = N^{(2)} = \frac{m(3m-1)}{2^3 \cdot 3},\ C = N^{(3)} = -\frac{m^2(m-1)}{2^4 \cdot 3}, \\ N^{(4)} = \frac{m(15m^3 - 30m^2 + 5m + 2)}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5}, \\ N^{(5)} = -\frac{m^2(m-1)(3m^2 - 7m - 2)}{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5}, \\ N^{(6)} = \frac{m\{7(9m^5 - 45m^4 + 45m^3 + 13m^2 - 6m) - 16\}}{2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}, \text{ etc.} \end{cases}$$

On voit que tous les coëfficiens d'un ordre impair tels que $N^{(3)}$, $N^{(5)}$, ont le facteur $m - 1$, ainsi que cela doit être, parcequ'ils deviennent nuls, lorsque $m = 1$ (§ 3).

§. 12. Le calcul numérique de ces coëfficiens sera assés long, quand les nombres m et n sont grands. Mais on pourra l'abréger beaucoup, en observant que, tous ces coëfficiens étant des fonctions entières de m, leurs différences d'un certain ordre seront constantes. Ainsi $N^{(n)}$ étant composé des termes $m, m^2, \ldots m^n$, (M) (§ 10), sa différence de l'ordre n sera constante. On a en général

$$\Delta^r x^n = n(n-1)\ldots(n-r+1)\,x^{n-r}$$
$$+ \frac{r}{2}\,n(n-1)\ldots(n-r)\,x^{n-r-1} + \text{cet.}$$

d'où il suit

$$\Delta^n x^n = 1.2\ldots n,\quad \Delta^{n-1} x^n = 2.3\ldots n.x + 1.2\ldots n\,\frac{n-1}{2}.$$

Supposant donc $u = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \text{cet.}$, on aura

$$\Delta^n u = 1.2\ldots n.a,$$
$$\Delta^{n-1} u = 2.3\ldots n.ax + 1.2\ldots n\,\frac{n-1}{2}\,a + 1.2\ldots(n-1)\,b.$$

Si on substitue m pour x, l'équation (M) donnera

$$N^{(n)} = \pm\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{1.2\ldots n}\,[1]^n \mp \frac{x(x+1)\ldots(x+n-2)}{1.2\ldots(n-1)}\,L^{(n)}_{n-1} \pm \text{cet.}$$

$L^{(n)}_{n-1}$ étant $= (n-1)\,[1]^{n-2}\,[2]$, par (6) (§. 7.): donc

$$N^{(n)} = \pm \frac{x^n [1]^n}{1.2\ldots n} \pm \frac{1+2+\ldots+(n-1)}{1.2\ldots n} [1]^n . x^{n-1}$$
$$\mp \frac{(n-1)[1]^{n-2}[2]}{1.2\ldots(n-1)} x^{n-1} \pm \text{cet.}$$

Faisant donc $N^{(n)} = \pm ax^n \mp bx^{n-1}$, on tirera de là

$$a = \frac{1}{2^n \times 1.2\ldots n}, \quad b = \frac{1}{2^{n-1}.3 \times 1.2\ldots(n-2)} - \frac{n . \frac{n-1}{2}}{2^n \times 1 . 2 \ldots n}, \text{ ou}$$

$$b = \frac{1}{2^{n+1}.3 \times 1.2\ldots(n-2)}: \text{ donc}$$

$$(f) \ldots \Delta^n N^{(n)} = \pm \frac{1}{2^n},$$

$$\Delta^{n-1} N^{(n)} = \pm \frac{m + \frac{n-1}{2}}{2^n} \mp \frac{n-1}{2^{n+1}.3} = \pm \frac{m + \frac{n-1}{3}}{2^n},$$

le signe + ou — devant être employé, selon que n est un nombre pair ou impair. Connaissant maintenant les deux dernières différences, on n'a qu'à chercher la différence $\Delta^{n-2} N^{(n)}$, et celles d'un ordre inférieur. Pour cet effet il suffit de calculer $n-1$ valeurs consécutives de $N^{(n)}$; et comme la suite (M) devient plus simple, lorsque m est négatif, on calculera $N^{(n)}$ pour les valeurs $m = -1$, $m = -2, \ldots, m = -(n-3)$, en commençant par la dernière; ce qui étant joint aux valeurs de $N^{(n)}$, qui repondent à $m = 0$ et $m = -1$, dont la première est toujours nulle et l'autre est connue (§ 8), donnera $n-1$ valeurs de $N^{(n)}$.

§. 13. Les formules (e) (§. 11.) pour $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, sont si simples, qu'on fera mieux de les calculer immédiatement. On aura donc

$$N^{(1)}_1 = -\tfrac{1}{2},\ N^{(1)}_2 = -1,\ N^{(1)}_3 = -\tfrac{3}{2},\ N^{(1)}_4 = -2, \text{ etc.}$$

le nombre au pied de la lettre indiquant la valeur de m;

$$N^{(2)}_1 = \tfrac{1}{12},\ N^{(2)}_2 = \tfrac{5}{12},\ N^{(2)}_3 = 1,\ N^{(2)}_4 = \tfrac{11}{6},\ N^{(2)}_5 = \tfrac{35}{1.2},$$
$$N^{(2)}_6 = \tfrac{17}{4},\ N^{(2)}_7 = \tfrac{35}{6},\ N^{(2)}_8 = \tfrac{23}{3}, \text{ etc.}$$

la différence seconde étant $= \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, et les différences premières de

$N^{(2)}_8$, $N^{(2)}_9$, etc. $\frac{25}{12}$, $\frac{28}{12}$, $\frac{31}{12}$, etc.

$N^{(3)}_1 = 0$, $N^{(3)}_2 = -\frac{1}{12}$, $N^{(3)}_3 = -\frac{3}{8}$, $N^{(3)}_4 = -1$, $N^{(3)}_5 = -\frac{25}{12}$,
$N^{(3)}_6 = -\frac{15}{4}$, $N^{(3)}_7 = -\frac{49}{8}$, $N^{(3)}_8 = -\frac{28}{3}$, etc.

§. 14. Pour le coëfficient $N^{(4)}$ on calculera (M) (§. 10.)
$N^{(4)}_{-1} = [4] = \frac{1}{2.3.4.5}$, $N^{(4)}_0 = 0$, $N^{(4)}_1 = L^{(4)}$ (§. 8.) $= -\frac{1}{2^4.3^2.5}$,
$\Delta^4 N^{(4)} = \frac{1}{2^4}$, $\Delta^3 N^{(4)} = \frac{m+1}{2^4}$ (f) (§. 12.), donc pour
$m = -1$, $\Delta^3 N^{(4)} = 0$.

Faisant donc $N^{(4)} = \frac{d}{2^4.3^2.5}$, on formera la table suivante, dans laquelle toutes les quantités depuis $m = 2$ jusqu'à $m = 8$, ont été calculées par le moyen des différences, fournies par les valeurs $m = -1$, $m = 0$ et $m = +1$.

m	d	Δd	$d^2\Delta$	$\Delta^3 d$
−1	6			
		−6		
0	0		5	
		−1		0
+1	−1		5	
		+4		45
2	+3		50	
		54		90
3	57		140	
		194		135
4	251		275	
		469		180
5	720		455	
		924		225
6	1644		680	
		1604		270
7	3248		950	
		2554		
8	5802			

Il est aisé d'étendre cette table aussi loin qu'on veut. La colonne d donne $N^{(4)}_2 = \frac{3}{2^4.3^2.5} = \frac{1}{2^4.3.5}$, $N^{(4)}_3 = \frac{19}{2^4.3.5}$, $N^{(4)}_4 = \frac{251}{2^4.3^2.5}$,
$N^{(4)}_5 = 1$, $N^{(4)}_6 = \frac{137}{60}$, $N^{(4)}_7 = \frac{203}{45}$, $N^{(4)}_8 = \frac{967}{120}$, etc.

§. 15. Pour le coëfficient $N^{(5)}$ on calculera

$$N^{(5)}_{-2} = 2[5] + L^{(6)}_{2} = 2[5] + 2[1][4] + 2[2][3] \;(§.\ 7.\ (6))$$

$$= \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3^2.4} = \frac{9}{2^3.3^2.5},$$

$$N^{(5)}_{-1} = [5] = \frac{1}{2^4.3^2.5},\quad N^{(5)}_{0} = 0,\quad N^{(5)}_{1} = 0,$$

$$\Delta^5 N^{(5)} = -\frac{1}{2^6},\quad \Delta^4 N^{(5)}_{-2} = \frac{2-\frac{4}{3}}{2^6} = \frac{1}{2^4.3}.$$

Ces données serviront à former la table suivante, dans laquelle on a supposé $N^{(5)} = \frac{e}{2^6.3^2.5}$. Elle donne

$$N^{(5)}_{2} = \frac{1}{720},\quad N^{(5)}_{3} = -\frac{1}{160},\quad N^{(5)}_{4} = -\frac{3}{40},\quad N^{(5)}_{5} = -\frac{95}{288},$$

$$N^{(5)}_{6} = -1,\quad N^{(5)}_{7} = -\frac{49}{20},\quad N^{(5)}_{8} = -\frac{469}{90},\ \text{etc.}$$

m	e	Δe	$\Delta^2 e$	$\Delta^3 e$	$\Delta^4 e$
−2	36				
		34			
−1	2		32		
		−2		−30	
0	0		2		30
		0		0	
+1	0		2		−15
		+2		−15	
2	2		−13		−60
		−11		−75	
3	−0		−88		−105
		−99		−180	
4	−108		−268		−150
		−367		−330	
5	−475		−598		−195
		−965		−525	
6	−1440		−1123		−240
		−2088		−765	
7	−3528		−1888		
		−3976			
8	−7504				

§. 16. Pour $N^{(6)}$, il faut calculer

$$N^{(6)}_{-3} = 3[6] + 3L^{(6)}_{2} + L^{(6)}_{3} = 3[6] + 6[1][5] + 3[3]^2 + 6[2][4]$$

$$+ 3[1]^2[4] + 6[1][2][3] + [2]^3 = \frac{3025}{2^6.3^3.5.7},$$

$$N^{(6)}_{-2} = 2[6] + L^{(6)}_{2} = \frac{127}{2^6.3^2.5.7},\quad N^{(6)}_{-1} = [6] = \frac{1}{2^4.3^2.5.7},$$

$N_0^{(6)} = 0$, $N_1^{(6)} = \frac{1}{2^6.3^3.5.7}$, $\Delta^6 N^{(6)} = \frac{1}{2^6}$,

$$\Delta^5 N_{-3}^{(6)} = \frac{-3+\frac{5}{3}}{2^6} = -\frac{4}{2^6.3}.$$

Faisant donc $N^{(6)} = \frac{f}{2^6.3^3.5.7}$, on aura $\Delta^5 f = -1260$, $\Delta^6 f = 945$; d'où il résultera la table suivante.

m	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
−3	3025					
		−2644				
−2	381		2275			
		−369		−1918		
−1	12		357		1575	
		−12		−343		−1260
0	0		14		315	
		+2		−28		−315
+1	2		−14		0	
		−12		−28		+630
2	−10		−42		630	
		−54		+602		1575
3	−64		+560		2205	
		+506		2807		2520
4	+442		3367		4725	
		3873		7532		3465
5	4315		10899		8190	
		14772		15722		4410
6	19087		26621		12400	
		41393		38322		
7	60480		54943			
		96336				
8	156816					

La colonne f de cette table donne

$N_2^{(6)} = -\frac{1}{2^6.3^3.7}$, $N_3^{(6)} = -\frac{1}{3^3.5.7}$, $N_4^{(6)} = \frac{221}{2^6.3^3.5.7}$,

$N_5^{(6)} = \frac{863}{2^6.3^3.7}$, $N_6^{(6)} = \frac{19087}{2^6.3^3.5.7}$, $N_7^{(6)} = 1$, $N_8^{(6)} = \frac{363}{140}$; etc.

§. 17. Pour $N^{(7)}$ on calculera $N_{-4}^{(7)} = 4[7]+6L_2^{(7)}+4L_3^{(7)}+L_4^{(7)}$, $N_{-3}^{(7)} = 3[7]+3L_2^{(7)}+L_3^{(7)}$, $N_{-2}^{(7)} = 2[7]+L_2^{(7)}$, $N_{-1}^{(7)} = [7]$ (M) (§. 10.), $N^{(7)} = 0$, et par les équations (f) (§. 12.), $\Delta^7 N^{(7)} = -\frac{1}{2^7}$, ce qui donne par les équations (6) (§. 7.), $N_{-4}^{(7)} = \frac{2650}{2^6.3^3.5.7}$, $N_{-3}^{(7)} = \frac{622}{2^7.3^2.5.7}$, $N_{-2}^{(7)} = \frac{85}{2^6.3^3.5.7}$, $N_{-1}^{(7)} = \frac{1}{2^7.3^2.5.7}$, $N_0^{(7)} = 0$, $N_1^{(7)} = 0$, et par les équations (f) (§. 12.), $\Delta^7 N^{(7)} = -\frac{1}{2^7}$,

$\Delta^6 N^{(7)}_{-4} = \frac{2}{2^7}$. Faisant donc $N^{(7)} = \frac{g}{2^7 . 3^3 . 5 . 7}$, pour éviter les fractions, on aura $\Delta^6 g = 1890$, $\Delta^7 g = -945$, d'où il résultera la table suivante.

m	g	Δg	$\Delta^2 g$	$\Delta^3 g$	$\Delta^4 g$	$\Delta^5 g$	$\Delta^6 g$
−4	10600						
		− 8734					
−3	1866		7038				
		− 1696		− 5509			
−2	170		1529		4144		
		− 167		− 1365		− 2940	
−1	3		164		1204		1890
		− 3		− 161		− 1050	
0	0		3		154		945
		0		− 7		− 105	
+1	0		− 4		49		0
		− 4		+ 42		− 105	
2	− 4		+ 38		− 56		− 945
		+ 34		− 14		− 1050	
3	+ 30		24		− 1106		− 1890
		58		− 1120		− 2940	
4	88		− 1096		− 4046		− 2835
		− 1038		− 5166		− 5775	
5	− 950		− 6262		− 9821		− 3780
		− 7300		− 14987		− 9555	
6	− 8250		− 21249		− 19376		
		− 28549		− 34363			
7	− 36799		− 55612				
		− 84161					
8	− 120960						

Il en suit $N^{(7)}_2 = -\frac{1}{2^6 . 3^3 . 5 . 7}$, $N^{(7)}_3 = \frac{1}{2^6 . 3^2 . 7}$, $N^{(7)}_4 = \frac{11}{2^4 . 3^3 . 5 . 7}$, $N^{(7)}_5 = -\frac{95}{2^6 . 3^3 . 7}$, $N^{(7)}_6 = -\frac{275}{2^6 . 3^2 . 7}$, $N^{(7)}_7 = -\frac{5257}{2^7 . 3^3 . 5}$, $N^{(7)}_8 = -1$

§. 18. Connaissant maintenant les intégrales Σu, $\Sigma^m u$, on trouvera les sommes d'un ordre quelconque, $S^m u$, à l'aide de l'équation (1) (§ 1). Si on substitue successivement Su pour u, $S^2 u$ pour Su, etc. l'équation (1) donnera

$$S . Su = \Sigma\, Su + Su = \Sigma^2 u + 2\,\Sigma u + u = S^2 u,$$

$$S . S^2 u = \Sigma\, S^2 u + S^2 u = \Sigma^3 u + 3\Sigma^2 u + 3\Sigma u + u = S^3 u\,;$$

d'où il est aisé de conclure la forme générale

$$S^r u = \Sigma^r u + r\,.\,\Sigma^{r-1} u + \frac{r(r-1)}{1.2}\Sigma^{r-2} u + \dots$$
$$+ \frac{r(r-1)\dots(r-p+1)}{1.2\dots p}\Sigma^{r-p} u + \frac{r(r-1)\dots(r-p)}{1.2\dots(p+1)}\Sigma^{r-p-1} u$$
$$+ \dots + r\,.\,\Sigma u + u.$$

En effet, la formule ayant été prouvée pour $r=2$, $r=3$, elle aura également lieu pour $r=3+1$, et en général pour $r+1$. Car on a

$$S^{r+1}u = S\,.\,S^r u = \Sigma\, S^r u + S^r u =$$

$$\Sigma^{r+1}u + r.\Sigma^r u + \frac{r(r-1)}{1.2}\Sigma^{r-1}u + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-p)}{1.2\dots(p+1)}\Sigma^{r-p}u + \dots + r\Sigma^2 u + \Sigma u$$
$$+1. \qquad + r. \qquad + \frac{r(r-1)\dots(r-p+1)}{1.2\dots p} \qquad + r. \quad + u =$$
$$\Sigma^{r+1}u + (r+1)\Sigma^r u + \frac{r(r+1)}{1.2}\Sigma^{r-1}u + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-p+1)}{1.2\dots p}\left(\frac{r-p}{p+1}+1\right)\Sigma^{r-p}u$$
$$+ \dots + (1+r)\,\Sigma u + u\,,$$

le terme général étant

$$\frac{r(r-1)\dots(r-p+1)}{1.2\dots p}\cdot\frac{r+1}{p+1}\cdot\Sigma^{r-p}u = \frac{(r+1)r(r-1)\dots(r+1-p)}{1.2\dots(p+1)}\Sigma^{(r+1)-(p+1)}u.$$

La valeur de $S^{r+1}u$ est donc identique avec celle qu'on obtient, en écrivant dans la formule supposée, $r+1$ au lieu de r ; d'où il suit en général,

$$(8)\dots S^m u = \Sigma^m u + m\Sigma^{m-1}u + \frac{m(m-1)}{1.2}\Sigma^{m-2}u + \dots + m\Sigma u + u.$$

Si on substitue pour les intégrales $\Sigma^m u$, $\Sigma^{m-1}u$, etc. leurs valeurs tirées de l'équation (L) (§ 10), savoir

$$\Sigma^m u = \int^m u\partial x^m + N^{(1)}\int^{m-1}u\partial x^{m-1} + \dots + N^{(n)}\int^{m-n}u\partial x^{m-n},$$

en observant que $\int^0 u\partial x^0 = u$, $\int^{-1}u\partial x^{-1} = \frac{\partial u}{\partial x}$, etc. il viendra

$$(N)\dots \Sigma^m u = \int^m u\partial x^m + N_m^{(1)}\int^{m-1}u\partial x^{m-1} + N_m^{(2)}\int^{m-2}u\partial x^{m-2} + \dots$$
$$+ N_m^{(m-1)}\int u\partial x + N_m^{(m)}u + N_m^{(m+1)}\frac{\partial u}{\partial x} + N_m^{(m+2)}\frac{\partial\partial u}{\partial x^2} + \text{cet.}$$
$$\Sigma^{m-1}u = \int^{m-1}u\partial x^{m-1} + N_{m-1}^{(1)}\int^{m-2}u\partial x^{m-2} + \dots + N_{m-1}^{(m-2)}\int u\partial x$$
$$+ N_{m-1}^{(m-1)}u + N_{m-1}^{(m)}\frac{\partial u}{\partial x} + \text{cet.} \quad \text{et ainsi de suite.}$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (8) donnera

$$(9)\dots S^m u = \int^m u\partial x^m + \{N_m^{(1)} + m\}\int^{m-1}u\partial x^{m-1}$$
$$+ \{N_m^{(2)} + mN_{m-1}^{(1)} + \frac{m(m-1)}{1.2}\}\int^{m-2}u\partial x^{m-2}$$

$$+\ldots+\left\{N_m^{(n)}+mN_{m-1}^{(n-1)}+\frac{m(m-1)}{1.2}N_{m-2}^{(n-2)}+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots.n}\right\}\int^{m-n}u\partial x^{m-n}$$

$$+\ldots.+\left\{N_m^{(m-1)}+mN_{m-1}^{(m-2)}+\frac{m(m-1)}{1.2}N_{m-2}^{(m-3)}+\ldots.+m\right\}\int u\partial x$$

$$+\left\{N_m^{(m)}+mN_{m-1}^{(m-1)}+\frac{m(m-1)}{1.2}N_{m-2}^{(m-2)}+\ldots.+mN_1^{(1)}+1\right\}u$$

$$+\left\{N_m^{(m+1)}+mN_{m-1}^{(m)}+\frac{m(m-1)}{1.2}N_{m-2}^{(m-1)}+\ldots.+mN_1^{(2)}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}+\ldots.$$

$$+\left\{N_m^{(m+n)}+mN_{m-1}^{(m+n-1)}+\ldots\ldots+mN_1^{(n+1)}\right\}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+\text{cet.}$$

Pour déterminer le dernier terme de chaque coëfficient, il faut observer que toute fonction $N^{(n)}$, étant multipliée par m (M) (§ 10), s'évanouit, lorsque m est nul, et que le premier terme du polynome $(1+H)^{-m}$ (§ 10), qui n'est pas multiplié par h, ou ce qui revient au même, celui qui précède $N^{(1)}$, est l'unité; d'où il suit $N_0^{(n)}=0$; $N_m^{(0)}=1$. Cela posé, le dernier terme de chaque coëfficient sera celui, où la lettre au pied de N, ou celle en haut devient nulle: dans le premier cas N sera $=0$, dans le second $N=1$; il faudra donc, dans le premier cas s'arrêter au terme précédent. Ainsi p. ex. le terme général du coëfficient de $\int^{m-n}u\partial x^{m-n}$ étant $\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots r}N_{m-r}^{(n-r)}$, N deviendra $N_{m-n}^{(0)}=1$, lorsque $r=n$, ce qui a donné le dernier terme $=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots.n}$. Le coëfficient de $\frac{\partial u}{\partial x}$ étant $\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots r}N_{m-r}^{(m-r+1)}$, $r=m$ donnera $N=N_0^{(1)}=0$: il faut donc s'arrêter au terme qui le précède, $r=m-1$, ce qui donne $m\,N_1^{(2)}$.

§. 19. La constante qu'il faut ajouter à chaque intégrale aux différentielles, $\int u\partial x$, $\int^2 u\partial x^2$, etc. sera déterminée par la nature de la suite proposée, dont le premier terme A est donné, l'*index* du terme précédent étant nul. On aura donc $u=A$, $\Sigma^m u=A$, et $\int^m u=A$, lorsque $x=1$; et si u est une fonction qui s'évanouit en même tems que x, on aura $u=\int^m u=0$, lorsque $x=0$. Supposant pour ex. $u=x$, on aura $\int u\partial x=\frac{x^2}{2}+a$, $\iint u\partial x^2=\frac{x^3}{6}+ax+b$,

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, d'où il suit, en faisant $x = 0$, (N) (§. 18.), $\Sigma u = 0 = a + N_1^{(2)} = a + \frac{1}{12}$ (§. 13.), ou $a = -\frac{1}{12}$, et $\Sigma^2 u = 0 = b - a + N_2^{(3)}$, donc $b = 0$.

§. 20. Chaque terme de $S^m u$ (9) (§ 18) a pour coëfficient une série, dont le calcul numérique paraît assés long; mais il pourra être abrégé considérablement. En effet, $N_m^{(1)}$ étant $= -\frac{m}{2}$ (§ 11) (*e*), le coëfficient de $\int^{m-1} u \partial x^{m-1}$ sera $\frac{m}{2} = - N_m^{(1)}$. Si on fait, pour abréger,

$$S^m u = \int^m + A' \int^{m-1} + B' \int^{m-2} + C' \int^{m-3} + \ldots$$
$$+ P' \int + Q' u + R' \frac{\partial u}{\partial x} + \text{cet.}$$

on aura $A' = - N_m^{(1)}$; et on trouvera pareillement $N_{m-1}^{(1)} = -\frac{m-1}{2}$, donc $B' = N_m^{(2)}$. Si on substitue

$$N_{m-1}^{(2)} = \frac{(m-1)(3m-4)}{2^3 . 3}, \quad N_{m-2}^{(1)} = -\frac{m-2}{2}$$

dans le coëfficient C′, il vient

$$m N_{m-1}^{(2)} + \frac{m(m-1)}{1.2} N_{m-2}^{(1)} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = \frac{m^2(m-1)}{2^3 . 3}$$
$$= -2 N_m^{(3)}, \quad \text{donc } C' = - N_m^{(3)}.$$

On trouvera par le même procédé, $D' = N_m^{(4)}$, $E' = - N_m^{(5)}$, etc. Nous aurons donc

$$(g) \ldots S^m u = \int^m u \partial x^m - N_m^{(1)} \int^{m-1} u \partial x^{m-1} + N_m^{(2)} \int^{m-2} u \partial x^{m-2}$$
$$- N_m^{(3)} \int^{m-3} u \partial x^{m-3} + \ldots \pm N_m^{(m)} u \mp N_m^{(m+1)} \frac{\partial u}{\partial x} \pm \text{cet.}$$

le signe supérieur ayant lieu, lorsque m est un nombre pair, et l'inférieur, si m est impair.

§. 21. Le coëfficient de $\int u \partial x = N_m^{(m-1)}$ est constamment égal à l'unité. On a vu (§. 13 — 17) que $N_2^{(1)} = -1$, $N_3^{(2)} = 1$, $N_4^{(3)} = -1$, $N_5^{(4)} = 1$, $N_6^{(5)} = -1$, $N_7^{(6)} = 1$, $N_8^{(7)} = -1$; et il est aisé de s'assurer que cela a généralement lieu pour $N_m^{(m-1)}$.

En effet, les coëfficiens $N_m^{(n)}$ sont des fonctions de m et n, et on vient de voir que, pour une certaine relation entre m et n, savoir $m = n + 1$, ces fonctions deviennent $= +1$ ou -1, selon que m est impair ou pair. Elles sont donc, au signe près, indépendantes de m; d'où il est clair qu'elles n'éprouveront aucun changement lorsqu'on mettra $m+2$, $m+4$, etc. à la place de m, parceque la relation $m = n + 1$ a toujours lieu. Ainsi le coëfficient de $\int u\partial x$, qui est $+N_m^{(m-1)}$ ou $-N_m^{(m-1)}$, selon que m est impair ou pair, doit nécessairement être $= +1$. On conclura le même résultat de la forme primitive du coëfficient de $\int u\partial x$ dans l'équation (9) (§. 18.),

$$P = N_m^{(m-1)} + mN_{m-1}^{(m-2)} + \frac{m(m-1)}{1.2} N_{m-2}^{(m-3)} + \ldots + m,$$

d'où il suit, par ce qui précède, si m est impair,

$$P = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1).(m-2)}{1.2.3} + \ldots - \frac{m(m-1)}{1.2} + m,$$

donc $P - 1 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} - \ldots + m - 1 = (1-1)^m = 0$, et $P = 1$. Si m est pair, on a

$$P = -1 + m - \frac{m(m-1)}{1.2} + \ldots - \frac{m(m-1)}{1.2} + m =$$
$$-\left(1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} - \ldots + \frac{m(m-1)}{1.2} - m + 1 - 1\right) =$$
$$-(1-1)^m + 1, \text{ donc } P = 1.$$

§. 22. Faisant les substitutions précédentes (§. 20. 21.) l'équation (g) se changera en

$$\begin{aligned}(P) \ldots\ S^m u = & \int^m u\partial x^m + \frac{m}{2}\int^{m-1} u\partial x^{m-1} + N_m^{(2)}\int^{m-2} u\partial x^{m-2} \\ & - N_m^{(3)}\int^{m-3} u\partial x^{m-3} + \ldots + N_m^{(2r)}\int^{m-2r} u\partial x^{m-2r} \\ & - N_m^{(2r+1)}\int^{m-2r-1} u\partial x^{m-2r-1} + \ldots + \int u\partial x \\ & \pm N_m^{(m)} u \mp N_m^{(m+1)} \frac{\partial u}{\partial x} \pm \ldots \pm N_m^{(m+2r)} \cdot \frac{\partial^{2r} u}{\partial x^{2r}} \\ & \mp N_m^{(m+2r+1)} \cdot \frac{\partial^{2r+1} u}{\partial x^{2r+1}} + \text{cet.}\end{aligned}$$

le signe supérieur ayant lieu, lorsque m est un nombre pair, et l'inférieur, si m est impair.

§. 23. Si on fait successivement $m = 1$, $m = 2$, etc. l'équation (P) donnera, à l'aide des valeurs de $N_m^{(r)}$ (§. 13 — 17.), les résultats suivans :

$$(h) \ldots \left\{ \begin{aligned} S\,u &= \int u\partial x + \frac{u}{2} + \frac{1}{12}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{720}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ &\qquad + \frac{1}{2^5.3^3.5.7}\cdot\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \text{cet.} \\ S^2u &= \int^2 u\partial x^2 + \int u\partial x + \frac{5u}{12} + \frac{1}{12}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{240}\cdot\frac{\partial\partial u}{\partial x^2} - \frac{1}{720}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ &\qquad - \frac{1}{2^4.3^3.7}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{1}{2^6.3^3.5.7}\cdot\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \text{cet.} \\ S^3u &= \int^3 u\partial x^3 + \frac{3}{2}\int^2 u\partial x^2 + \int u\partial x + \frac{3u}{8} + \frac{19}{240}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \\ &\qquad + \frac{1}{160}\cdot\frac{\partial\partial u}{\partial x^2} - \frac{1}{945}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{2^6.3^2.7}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \text{cet.} \\ S^4u &= \int^4 u\partial x^4 + 2\int^3 u\partial x^3 + \frac{11}{6}\int^2 u\partial x^2 + \int u\partial x + \frac{251}{720}u \\ &\qquad + \frac{3}{40}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{221}{2^4.3^3.5.7}\cdot\frac{\partial\partial u}{\partial x^2} - \frac{11}{2^4.3^3.5.7}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \text{cet.} \\ S^5u &= \int^5 u\partial x^5 + \frac{5}{2}\int^4 u\partial x^4 + \frac{35}{12}\int^3 u\partial x^3 + \frac{25}{12}\int^2 u\partial x^2 + \int u\partial x \\ &\qquad + \frac{95}{288}u + \frac{863}{2^6.3^3.7}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{95}{2^6.3^3.7}\cdot\frac{\partial\partial u}{\partial x^2} + \text{cet.} \end{aligned} \right.$$

Il ne sera pas inutile, d'appliquer les formules précédentes à une couple d'exemples.

§. 24. Prenons pour premier exemple la suite des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, ...; d'où $u = x$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, les différentielles suivantes étant nulles; $\int u\partial x = \frac{x^2}{2} + a$, $\int^2 u\partial x^2 = \frac{x^3}{2.3} + ax + b$, $\int^3 u\partial x^3 = \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{ax^2}{2} + bx + c$, $\int^4 u\partial x^4 = \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{ax^3}{2.3} + \frac{bx^2}{2} + cx + d$, $\int^5 u\partial x^5 = \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \frac{ax^4}{2.3.4} + \frac{bx^3}{2.3} + \frac{cx^2}{2} + dx$. Si on fait $x = 0$, on a $u = 0$, $Su = 0$, $S^2u = 0$, etc. ce qui donne, en vertu des équations (h),

$0 = a + \frac{1}{12}$, $0 = b + a + \frac{1}{12}$, $0 = c + \frac{3}{2}b + a + \frac{19}{240}$,
$0 = d + 2c + \frac{11}{6}b + a + \frac{3}{40}$; d'où il suit
$a = -\frac{1}{12}$, $b = 0$, $c = \frac{1}{240}$, $d = 0$.

Cela donnera

$$\int u\partial x = \frac{x^2}{2},\ \int^2 u\partial x^2 = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{12},\ \int^3 u\partial x^3 = \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{24},$$

$$\int^4 u\partial x^4 = \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{72} + \frac{x}{240},\ \int^5 u\partial x^5 = \frac{x^6}{720} - \frac{x^4}{288} + \frac{x^2}{480},$$

d'où l'on tirera, à l'aide de la dernière des équations (h),

$$S^5 u = \frac{x^6}{720} - \frac{x^4}{288} + \frac{x^2}{480} + \frac{x^5}{48} - \frac{5x^3}{144} + \frac{x}{96} + \frac{35x^4}{288} - \frac{35x^2}{288}$$

$$+ \frac{25x^3}{72} - \frac{25x}{144} + \frac{x^2}{2} + \frac{95x}{288} = \frac{x^6+15x^5+85x^4+225x^3+274x^2+120x}{720}$$

$$= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{1.2.3.4.5.6};$$

ce qui est la formule connue des nombres *figurés* du cinquième ordre.

§. 25. Prenons pour second exemple la suite des logarithmes des nombres naturels

$l1,\ l2,\ l3,\ l4$, etc. d'où l'on conclura

$$u = lx,\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x},\ \frac{\partial\partial u}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{2}{x^3},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{2.3}{x^4},$$

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = \frac{2.3.4}{x^5},\ \text{etc.}\ \int u\partial x = xlx - x + a,$$

$$\int^2 u\partial x^2 = \frac{x^2}{2}lx - \frac{3}{4}x^2 + ax + b,$$

$$\int^3 u\partial x^3 = \frac{x^3}{2.3}lx - \frac{11.x^3}{2^2.3^2} + \frac{ax^2}{2} + bx + c,$$

$$\int^4 u\partial x^4 = \frac{x^4 lx}{2.3.4} - \frac{25.x^4}{2.3^2.4^2} + \frac{ax^3}{2.3} + \frac{bx^2}{2} + cx + d;\ \text{etc.}$$

Les constantes a, b, c, d, seront déterminées parceque le premier terme de la suite proposée et de ses sommatrices est $l1 = 0$. Faisant donc $x = 1$, $u = 0$, $Su = 0$, $S^2u = 0$, $S^3u = 0$, $S^4u = 0$, les équations (h) (§. 23.) donneront

$$0 = -1 + a + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{2^2.3^2.5.7} + \text{cet.}$$

$$0 = -\frac{3}{4} + a + b - 1 + a + \frac{1}{12} - \frac{1}{240}$$
$$- 2N_2^{(5)} - 2.3.N_2^{(6)} - \ldots - 2.3\ldots(n-3)N_2^{(n)},$$

$$0 = -\frac{11}{36} + \frac{a}{2} + b + c - \frac{9}{8} + \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b - 1 + a + \frac{19}{240} - \frac{1}{160}$$
$$+ 2N_3^{(6)} + 2.3.N_3^{(7)} + \ldots + 2.3\ldots(n-4)N_3^{(n)};$$

$$0 = -\tfrac{25}{288} + \tfrac{a}{6} + \tfrac{b}{2} + c + d - \tfrac{11}{18} + a + 2b + 2c$$
$$- \tfrac{11}{8} + \tfrac{11}{6}a + \tfrac{11}{6}b - 1 + a + \tfrac{3}{40} - \tfrac{221}{2^4 . 3 . 5 . 7 . 9}$$
$$- 2N_4^{(7)} - \ldots - 2.3\ldots(n-5)N_4^{(n)}; \quad \text{etc.}$$

Ainsi les constantes sont données par des suites infinies. Quant à la première, a, *Euler* a prouvé (l. c. Cap. VI. §. 158.), que $a = \frac{1}{2} l 2\pi$. Posant donc

$$\tfrac{1}{2} l 2\pi \doteq 0{,}9189385332 = k, \text{ on aura}$$

$$a = k,\ b = \tfrac{401}{240} - 2k + 2\{N_2^{(5)} + 3 . N_2^{(6)} + 3 . 4 . N_2^{(7)} + \text{cet.}\}$$
$$c = 2k - \tfrac{131}{72} - 5\{N_2^{(5)} + 3 . N_2^{(6)} + 3 . 4 . N_2^{(7)} + \text{cet.}\}$$
$$- 2\{N_3^{(6)} + 3 . N_3^{(7)} + 3 . 4 . N_3^{(8)} + \text{cet.}\},$$
$$d = \tfrac{1156}{945} - \tfrac{4}{3}k + \tfrac{19}{3}\{N_2^{(5)} + 3 . N_2^{(6)} + 3 . 4 . N_2^{(7)} + \text{cet.}\}$$
$$+ 6\{N_3^{(6)} + 3N_3^{(7)} + 3 . 4 . N_3^{(8)} + \text{cet.}\}$$
$$+ 2\{N_4^{(7)} + 3N_4^{(8)} + 3 . 4 . N_4^{(9)} + \text{cet.}\};$$

ou exprimant k en nombres

$$a = 0{,}9189385332;$$
$$b = -0{,}1670437331 + 2\{N_2^{(5)} + 3N_2^{(6)} + 3 . 4 . N_2^{(7)} + \text{cet.}\},$$
$$c = 0{,}018432622 - 5\{N_2^{(5)} + 3N_2^{(6)} + 3 . 4 . N_2^{(7)} + \text{cet.}\}$$
$$- 2\{N_3^{(6)} + 3 . N_3^{(7)} + 3 . 4 . N_3^{(8)} + \text{cet.}\},$$
$$d = -0{,}0019709543 + \tfrac{19}{3}\{N_2^{(5)} + 3 . N_2^{(6)} + 3 . 4 . N_2^{(7)} + \text{cet.}\}$$
$$+ 6\{N_3^{(6)} + 3 . N_3^{(7)} + 3 . 4 . N_3^{(8)} + \text{cet.}\} + 2\{N_4^{(7)} + \ldots + 3 . 4 \ldots (n-5)N_4^{(n)}\}.$$

Rassemblant toutes les quantités précédentes, et introduisant les valeurs numériques, données plus haut (§. 13.— 17.), on aura

$$S^4 lx = \{\tfrac{x^4}{24} + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{11}{12}x^2 + x + \tfrac{251}{720}\} \log x - 0{,}0868055\ldots x^4$$
$$- 0{,}4579547 . x^3 - \{0{,}5390873 - 60(N_2^{(8)} + 6N_2^{(9)} + 6 . 7 . N_2^{(10)} + \text{cet.})\}x^2$$
$$+ \left\{\begin{matrix} 0{,}369198 - 60(N_2^{(8)} + 6N_2^{(9)} - 6 . 7 . N_2^{(10)} + \text{cet.}) \\ - 24(N_3^{(8)} + 5 . N_3^{(9)} + 5 . 6 . N_3^{(10)} + \text{cet.} \end{matrix}\right\} x$$

$$+ 0{,}6484127 + 24\{N_3^{(8)} + 5N_3^{(9)} + 5.6.N_3^{(10)} + \text{cet.}\}$$
$$+ 6\{N_4^{(8)} + 4N_4^{(9)} + 4.5.N_4^{(10)} + \text{cet.}\}$$
$$+ \frac{0{,}075}{x} - \frac{0{,}007308}{x^2} - \frac{0{,}001455}{x^3} - \frac{1.2.3}{x^4}N_4^{(8)} - \frac{1.2.3.4}{x^5}N_4^{(9)} - \text{cet.}$$

On trouvera de la même manière, par les équations (h) (§. 23.),

$$S^3 lx = \{\tfrac{x^3}{6} + \tfrac{3}{4}x^2 + x + \tfrac{3}{8}\}\log x - \tfrac{11}{36}x^3 - 0{,}665530733x^2$$
$$+ \{0{,}21235613 + 120\,(N_2^{(8)} + 6N_2^{(9)} + 6.7.N_2^{(10)} + \text{cet.})\}\,x$$
$$+ 0{,}6864418 - 120\,\{N_2^{(8)} + 6N_2^{(9)} + \text{cet.}\}$$
$$- 24\,\{N_3^{(8)} + 5N_3^{(9)} + 5.6.N_3^{(10)} + \text{cet.}\}$$
$$+ \frac{0{,}079166\ldots}{x} - \frac{0{,}00625}{x^2} - \frac{0{,}0021164}{x^3} + \frac{0{,}001488}{x^4}$$
$$+ \frac{2.3.4}{x^5}N_3^{(8)} + \frac{2.3.4.5}{x^6}N_3^{(9)} + \text{cet.}$$
$$S^2 lx = (\tfrac{x^2}{2} + x + \tfrac{5}{12})\,lx - \tfrac{3}{4}x^2 - 0{,}08106147\,.\,x$$
$$+ 0{,}7528869 + 120\,(N_2^{(8)} + 6N_2^{(9)} + 6.7.N_2^{(10)} + \text{cet.})$$
$$+ \frac{1}{12.x} - \frac{1}{240.x^2} - \frac{1}{360.x^3} + \frac{0{,}000992}{x^4} - \frac{0{,}0008}{x^5}$$
$$- \frac{1.2.3.4.5}{x^6}N_2^{(8)} - \frac{1.2\ldots6}{x^7}N_2^{(9)} - \text{cet.}$$

Les sommes de logarithmes, de quelque ordre qu'elles soient, peuvent être exprimées par le logarithme d'un produit de puissances. Ainsi u étant $\log x$, on a

$$Su = l1 + l2 + l3 + \ldots + lx = l1.2.3\ldots x,$$
$$S^2u = l1 + l1.2 + l1.2.3 + \ldots + l1.2.3\ldots x = l1^x.2^{x-1}.3^{x-2}\ldots(x-1)^2x,$$
$$S^3u = l2 + l2^2.3 + l2^3.3^2.4 + \ldots = l2^{\frac{x(x-1)}{2}}.3^{\frac{(x-1)(x-2)}{2}}\ldots(x-1)^3x,$$
$$S^4u = l2 + l2^3.3 + l2^6.3^3.4 + \ldots = lx(x-1)^4(x-2)^{10}(x-3)^{20}\ldots,$$

le terme général étant $(x-n)^{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}}$, et le dernier $2^{\frac{(x-1)x(x+1)}{2.3}}$.

III.

NOUVELLE MÉTHODE POUR RÉDUIRE LES DISTANCES LUNAIRES.

Présenté le 11 Août 1824.

M. *Horner* ayant publié des tables qui doivent servir à dépouiller les distances de la lune à un autre astre, d'abord de l'effet de la réfraction et ensuite de celui de la parallaxe, je fus chargé par l'Amirauté de les examiner. En m'occupant de cet examen, je me suis aperçu que, malgré le grand nombre de solutions qu'on a donneés de ce problème, on pourrait encore le traiter d'une manière neuve qui donne ce me semble, la solution la plus directe, la plus exacte, et la plus conforme à l'analyse mathématique.

Toutes les méthodes qu'on peut imaginer, pour réduire les distances lunaires, se réduisent à deux classes, dont l'une se propose de trouver la vraie distance, tandis que l'autre a pour but, de chercher sa différence, ou ce qu'il faut ajouter à la distance observée, pour avoir la vraie. Dans la première classe il y a des méthodes rigoureuses, et d'autres qui approchent plus ou moins de la vérité; celles de la seconde qu'on a imaginées jusqu'à présent, ne sont qu'approximatives. Le problème consiste à déduire la vraie distance de celle qu'on a observée, et qui n'en diffère que par l'effet des réfractions et des parallaxes. Or c'est une règle générale que, lorsque l'inconnue diffère peu de la quantité donnée, il vaut mieux de chercher leur petite différence que l'inconnue elle même. Il en suit, qu'une exactitude parfaite ne saurait être obte-

nue qu'en déterminant la différence ou la correction de la distance observée, par une formule rigoureuse, que ne peut donner que le théorème de *Taylor*. Je me propose donc de résoudre le problème de la réduction des distances lunaires, par le moyen de ce théorème.

La distance lunaire, soit vraie soit apparente, est le troisième côté d'un triangle sphérique, l'angle opposé étant la différence des azimuts des deux astres, et les côtés adjacens leurs distances zénitales. Les deux derniers sont altérés par la réfraction et la parallaxe, tandis que l'angle demeure constant, vû que les réfractions et les parallaxes ne font pas sortir les astres de leurs cercles verticaux. On peut donc regarder la distance comme une fonction de deux variables, les hauteurs des deux astres, dont les variations sont leurs respectives parallaxes moins les réfractions, variations données par les hauteurs mêmes; et il s'agit de trouver la variation de la fonction, qui en résulte. En regardant donc la distance D comme une fonction de deux variables L, S, dont les variations ΔL, ΔS, sont données, on aura celle de la distance, ΔD, par la formule connue

$$(A) \ldots \Delta D = \left(\frac{\partial D}{\partial L}\right) \Delta L + \left(\frac{\partial D}{\partial S}\right) \Delta S + \left(\frac{\partial\partial D}{\partial L^2}\right) \frac{\Delta L^2}{2} + \left(\frac{\partial\partial D}{\partial S^2}\right) \frac{\Delta S^2}{2} + \left(\frac{\partial\partial D}{\partial L \partial S}\right) \Delta L \Delta S + \left(\frac{\partial^3 D}{\partial L^3}\right) \frac{\Delta L^3}{6} + \text{cet.}$$

Si on désigne par Z l'azimut, intercepté entre les deux astres, par L la hauteur apparente ou observée de la lune, et par S celle du soleil, d'une étoile, ou d'une planète, on aura

$$(B) \ldots \cos Z = \frac{\cos D - \sin L \sin S}{\cos L \cos S}.$$

Z étant une quantité constante, la différentielle du second membre de l'équation (B) sera nulle: ce qui donne

$$0 = -\partial D \sin D \cos L \cos S + \partial L \cos S (\cos D \sin L - \sin S) + \partial S \cos L (\cos D \sin S - \sin L).$$



Il suit de là

$$(a) \ldots \left(\frac{\partial D}{\partial L}\right) = \frac{\cos D \sin L - \sin S}{\sin D \cos L},$$

$$(b) \ldots \left(\frac{\partial D}{\partial S}\right) = \frac{\cos D \sin S - \sin L}{\sin D \cos S}.$$

On en conclura par le moyen des différentielles partielles,

$$(c) \ldots \left(\frac{\partial \partial D}{\partial L^2}\right) = \frac{\sin^2 D - \sin^2 L - \sin^2 S + 2 \cos D \sin L \sin S}{\operatorname{tang} D \sin^2 D \cos^2 L},$$

$$(d) \ldots \left(\frac{\partial \partial D}{\partial S^2}\right) = \frac{\sin^2 D - \sin^2 L - \sin^2 S + 2 \cos D \sin L \sin S}{\operatorname{tang} D \sin^2 D \cos^2 S} = \frac{\cos^2 L}{\cos^2 S}\left(\frac{\partial \partial D}{\partial L^2}\right),$$

$$(e) \ldots \left(\frac{\partial \partial D}{\partial L \partial S}\right) = \frac{\sin^2 L + \sin^2 S - \sin^2 D - 2 \cos D \sin L \sin S}{\sin^2 D \cos L \cos S} = -\frac{\cos L}{\cos D \cos S}\left(\frac{\partial \partial D}{\partial L^2}\right).$$

En faisant pour abréger,

$$L + S = R,\ L - S = T,\ \sin^2 D - \sin^2 L - \sin^2 S + 2 \cos D \sin L \sin S = A,$$

on trouvera par les transformations trigonométriques connues,

$$\sin^2 D - \sin^2 L - \sin^2 S = \tfrac{1}{2} \cos 2L + \tfrac{1}{2} \cos 2S - \cos^2 D =$$
$$\cos R \cos T - \cos^2 D,$$

$$2 \cos D \sin L \sin S = \cos D (\cos T - \cos R),$$

donc

$$A = (\cos R + \cos D)(\cos T - \cos D) =$$
$$4 \cos \frac{D+R}{2} \cos \frac{D-R}{2} \sin \frac{D+T}{2} \sin \frac{D-T}{2}.$$

En faisant donc

$$(f) \ldots \frac{D+L+S}{2} = a,\ \frac{D-L-S}{2} = b,\ \frac{D+L-S}{2} = c,\ \frac{D-L+S}{2} = d,$$

$$(g) \ldots \cos a \cos b \sin c \sin d = M,$$

on aura, par l'équation (c), $\left(\frac{\partial \partial D}{\partial L^2}\right) = \frac{A \operatorname{cotang} D}{\sin^2 D \cos^2 L}$, ou

$$(h) \ldots \left(\frac{\partial \partial D}{\partial L^2}\right) = \frac{4 M \operatorname{cotang} D}{\sin^2 D \cos^2 L},$$

formule très-commode pour l'usage des logarithmes. On aura $\left(\frac{\partial \partial D}{\partial S^2}\right)$ et $\left(\frac{\partial \partial D}{\partial L \partial S}\right)$, en multipliant (h) par $\frac{\cos^2 L}{\cos^2 S}$ et par $-\frac{\cos L}{\cos D \cos S}$.

Soient maintenant l, s, les réfractions aux hauteurs observées L, S, avec les corrections, dues à la hauteur du thermomètre et à celle du baromètre, p la parallaxe de la lune à la hauteur $L - l$,

et sous la latitude du lieu de l'observation, si l'on veut tenir compte de l'aplatissement de la terre. Cela posé, et observant que la réfraction s doit être diminuée de la parallaxe à la hauteur S, quand on a observé la distance de la lune au soleil, ou à une planète dont la parallaxe n'est pas insensible; on aura

$$\Delta L = p - l, \quad \Delta S = - s.$$

En substituant donc (a) (b) (h) (d) (e), l'équation (A) se changera en

$$(C) \ldots . \Delta D = (p - l)\left(\frac{\operatorname{tang} L}{\operatorname{tang} D} - \frac{\sin S}{\sin D \cos L}\right) + s\left(\frac{\sin L}{\sin D \cos S} - \frac{\operatorname{tang} S}{\operatorname{tang} D}\right)$$
$$+ \frac{2(p-l)^2 M \cot D}{\sin^2 D \cos^2 L} + \frac{2s^2 M \cot D}{\sin^2 D \cos^2 S} + \frac{4(p-l)\, s . M}{\sin^3 D \cos L \cos S} + \text{cet.}$$

La plus grande valeur que $p - l$ puisse avoir, est de $56'$, ce qui donne pour le *maximum* de $(p-l)^2 = 55''$, et pour celui de $\frac{\Delta L^3}{6} = 0'', 1$. Les autres termes sont encore moins considérables: on peut donc, dans tous les cas, sans aucune erreur sensible, se borner aux termes que nous avons développés. Cela posé, le petit arc δ qu'il faut ajouter à la distance observée D, pour avoir la vraie distance D', sera

$$(D) \ldots . \delta = \frac{(p-l)\cot D}{\cos L}\left\{\sin L - \frac{\sin S}{\cos D} + \frac{2 M \sin (p-l)}{\sin^2 D \cos L}\right\}$$
$$+ \frac{s \cot D}{\cos S}\left\{\frac{\sin L}{\cos D} - \sin S + \frac{2 M \sin s}{\sin^2 D \cos S} + \frac{4 M \sin (p-l)}{\sin^2 D \cos D \cos L}\right\}.$$

Lorsque D est plus grand que $45°$, ce qui est ordinairement le cas, les deux premiers termes suffiront pour l'usage ordinaire, et l'on aura

$$(E) \ldots . \delta = (p-l)\left(\frac{\operatorname{tang} L}{\operatorname{tang} D} - \frac{\sin S}{\sin D \cos L}\right) + s\left(\frac{\sin L}{\sin D \cos S} - \frac{\operatorname{tang} S}{\operatorname{tang} D}\right).$$

Cette expression donne une précision suffisante pour l'usage des navigateurs, lorsque D surpasse $50°$, et il est aisé de la mettre en tables, ainsi qu'on le verra plus bas. On pourrait la rendre plus commode pour les logarithmes, en calculant deux angles λ, σ, par les équations

$$\sin \lambda = \cos D \sin L, \quad \sin \sigma = \cos D \sin S:$$

alors l'équation (E) prendra la forme

$$(F) \ldots . \delta = \frac{2}{\sin D} \left\{ \frac{p-l}{\cos L} \sin \frac{\lambda - S}{2} \cos \frac{\lambda + S}{2} + \frac{s}{\cos S} \sin \frac{L-\sigma}{2} \cos \frac{L+\sigma}{2} \right\}.$$

Lorsque $D = 90^\circ$, on a $\cot D = 0$, mais $\frac{\cot D}{\cos D} = \frac{1}{\sin D} = 1$, et l'équation (D) se réduit à

$$\delta = \frac{s \sin L}{\cos S} - \frac{(p-l) \sin S}{\cos L} + \frac{4M(p-l)s}{\cos L \cos S}.$$

Dans le cas, où L ou S est $= 90^\circ$, $p - l$ ou s devient nul ; et s'il y a à la fois $D = 90^\circ$ et $L = 90^\circ$, le soleil est dans l'horizon, $S = 0$, $p - l = 0$, et $\delta = \frac{s \sin L}{\cos S} = s$. On trouvera de même $\delta = -(p-l)$, lorsque $D = 90^\circ$ et $S = 90^\circ$. Tout cela est d'ailleurs évident par le triangle donné. On pourrait croire que l'équation (E) est en défaut, lorsque l'un des deux astres a été observé au zénit ; parceque L étant $= 90^\circ$, on a en même tems $p - l = 0$ et $\cos L = 0$, $\operatorname{tang} L = \infty$, donc $\delta = \frac{0}{0}$. Mais la lune étant au zénit, D sera $= 90^\circ - S$, et $\delta = \frac{p-l}{tg\,D}(tg\,L - \sec L) + s\left(\frac{1}{\sin^2 D} - \frac{1}{tg^2 D}\right) = -\frac{p-l}{tg\,D} \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{L}{2}\right) + \frac{s(1-\cos^2 D)}{\sin^2 D}$. Le premier terme est $= 0^2$, le second $= s$, donc $\delta = s$, comme cela doit être.

La méthode que je viens d'exposer, est, ce me semble, la plus directe et la plus exacte. Elle est directe, parcequ'elle donne immédiatement la correction cherchée, en fonction des trois angles donnés, D, L, S, sans qu'ils aient besoin d'aucune correction. Elle est exacte parce que, au lieu de la distance réduite, elle donne sa petite différence, non par des approximations, mais par une expression rigoureuse. Dans toute méthode qui donne la distance même, chaque sinus ou cosinus peut être inexact de plusieurs unités dans la septième chiffre, parcequ'on néglige les dixièmes de secondes dans les angles : le sinus de la distance ou de la demi-distance, qui résulte de la combinaison de six ou huit cosinus, pourra

être encore plus inexact; et une erreur de cinq unités dans la septième chiffre en produira une d'une demi-seconde sur la demi-distance, et d'une seconde sur la distance. Comme, dans notre méthode, ces erreurs n'affectent que le coëfficient de la correction qui est presque toujours moindre que $1000''$, il n'en peut jamais résulter une erreur d'un dixième de seconde.

M. *Delambre*, ayant fait dans son *Astronomie Théor. et Prat.* (Tom. III. pag. 620.), la remarque, qu'on trouvera avec plus de précision la correction δ, que la vraie distance $D+\delta$, se propose de déterminer δ. Mais au lieu d'une formule directe et rigoureuse, il trouve l'équation

$$\sin\frac{\delta}{2}\,.\,\sin\left(D+\frac{\delta}{2}\right)=\sin\frac{p-l+s}{2}\sin\left(L-S+\frac{p-l+s}{2}\right)$$
$$-\sin\frac{D+L-S}{2}\,.\,\sin\frac{D-L+S}{2}\left(1-\frac{\cos L'\cos S'}{\cos L\cos S}\right),$$

L' et S' étant les hauteurs, corrigées par les réfractions et les parallaxes. Cette équation ne peut se résoudre que par des approximations.

Notre méthode a encore cet avantage, qu'on peut donner au calcul le degré de précision, qu'exige chaque cas particulier, en calculant plus ou moins de termes, qu'on trouve tout développés dans l'équation (D). Cette équation est une source ou l'on peut puiser toutes les méthodes, au moins celles qui donnent la réduction de la distance, au lieu de la distance réduite. Prenons pour exemple la formule de M. *Horner*. Sa méthode consiste, comme celle de M. *Lyons*, à dépouiller la distance observée d'abord de l'effet des réfractions, et ensuite de celui des parallaxes; et il trouve, pour la correction, due aux réfractions,

$$(G)\ldots.\ \delta'=(m-1)\left\{\text{tang}\,\frac{D}{2}-\text{tang}\,\frac{T}{2}+(1-\cos T)(\text{cosec}\,T-\text{cosec}\,D)\right\}$$
$$+\frac{(s-l)\sin T}{\sin D},$$

T étant $=L-S$, $L'=L-l$, $S'=S-s$, $m=\frac{\cos L'\cos S'}{\cos L\cos S}$.

Pour déduire cette équation de notre formule, il faut supposer $M = 0$ et $p = 0$: alors l'équation (E) donnera

$$\delta' = \operatorname{cosec} D \left\{ \frac{s(\sin L - \cos D \sin S)}{\cos S} + \frac{l(\sin S - \cos D \sin L)}{\cos L} \right\},$$

En substituant

$$\sin S \cos (L - S) + \cos S \sin (L - S) \text{ pour } \sin L,$$
$$\text{et } \sin L \cos (L - S) - \cos L \sin (L - S) \text{ pour } \sin S,$$

on aura

$$\delta' = \operatorname{cosec} D \{ (\cos T - \cos D)(s \operatorname{tg} S + l \operatorname{tg} L) + (s - l) \sin T \} =$$
$$\operatorname{cosec} D \left\{ \frac{\cos T - \cos D}{\cos L \cos S} (s \cos L \sin S + l \sin L \cos S) + (s - l) \sin T \right\}.$$

Mais à cause de $L' = L - l$, $S' = S - s$, on aura, en négligeant les carrés des réfractions,

$$\cos L' = \cos L + l \sin L, \quad \cos S' = \cos S + s \sin S,$$

d'ou il viendra

$$\cos L' \cos S' = \cos L \cos S + s \cos L \sin S + l \sin L \cos S,$$

ce qui étant substitué dans la dernière équation, donnera

$$\delta' = \operatorname{cosec} D \left\{ \frac{\cos T - \cos D}{\cos L \cos S} (\cos L' \cos S' - \cos L \cos S) + (s - l) \sin T \right\},$$

ou

$$(H) \ldots\ldots \delta' = \frac{(m - 1)(\cos T - \cos D) + (s - l) \sin T}{\sin D};$$

d'ou il est aisé de conclure

$$\delta' = \frac{2(m - 1) \sin \tfrac{1}{2}(D + T) \sin \tfrac{1}{2}(D - T) + (s - l) \sin T}{\sin D}$$

ou en employant les dénotations précédentes,

$$(K) \ldots\ldots \delta = \frac{2(m - 1) \sin c \sin d}{\sin D} + \frac{(s - l) \sin T}{\sin D}.$$

La formule (K) est la plus commode pour le calcul trigonométrique, au lieu que (H) est plus commode pour la construction des tables. Il est aisé, d'en conclure la formule (G) que M. *Horner* a cru plus commode pour construire des tables. On sait qu'en général

$$\operatorname{tang} \frac{\Phi}{2} = \operatorname{cosec} \Phi - \cot \Phi, \quad \text{ou } \cot \Phi = \frac{1}{\sin \Phi} - \operatorname{tang} \frac{\Phi}{2},$$

ce qui donne

$$\frac{\cos T - \cos D}{\sin D} = \frac{\cos T}{\sin D} + \operatorname{tg}\frac{D}{2} - \operatorname{cosec} D - \operatorname{tg}\frac{T}{2} + \operatorname{tg}\frac{T}{2} =$$

$$\frac{\cos T}{\sin D} + \operatorname{tg}\frac{D}{2} - \operatorname{cosec} D - \operatorname{tg}\frac{T}{2} + \operatorname{cosec} T - \cot T =$$

$$\operatorname{tg}\frac{D}{2} - \operatorname{tg}\frac{T}{2} + (1 - \cos T)(\operatorname{cosec} T - \operatorname{cosec} D),$$

d'où il vient la formule (G).

Il ne me reste qu'à comparer la formule (D) avec les méthodes connues, parmi lesquelles je choisirai celles de Borda et de mon illustre confrère, M. *Fuss*. En conservant les dénotations dont je me suis servi jusqu'à présent, désignant par D', L', S', la distance et les hauteurs vraies, et faisant pour abréger,

$$\frac{\cos a \cos b \cos L' \cos S'}{\cos L \cos S} = N, \quad \frac{L' + S'}{2} = e,$$

Borda emploie les deux formules suivantes,

$$(L) \ldots \sin \Phi = \frac{\sqrt{N}}{\cos e}, \quad (M) \ldots \sin \frac{D'}{2} = \cos \Phi \cos e.$$

M. *Fuss* trouve D' par une seule formule

$$(N) \ldots \cos D' = 2N - \cos 2e.$$

La première méthode, qu'on déduira aisément de la dernière, paraît un peu plus longue, parceque Borda n'a voulu employer que des logarithmes, tandis que la formule (N) est la différence ou la somme de deux nombres, dont l'un est un cosinus naturel, $\cos 2e$. Prenons pour exemple celui qu'on trouve dans les *Tables de Callet* (pag. 91. 92.), qui donne ce qui suit.

$$D = 108^\circ\, 42'\, 3''.\ L = 54^\circ\, 11'\, 57'',\ S = 6^\circ\, 27'\, 34'',$$

$$p - l = 31'\, 41'' = 1901'',\ s = 7'\, 45'' = 465'';$$

d'où l'on tire

$$a = 84^\circ\, 40'\, 47'', b = 24^\circ\, 1'\, 16'', c = 78^\circ\, 13'\, 13'', d = 30^\circ\, 28'\, 50'',$$

$$L' = 54^\circ\, 43'\, 38'',\ S' = 6^\circ\, 19'\, 49'',\ e = 30^\circ\, 31'\, 43'', 5.$$

Calcul suivant les formules (L) (M).



$\log\cos a = 8,96718.74$	$\log\sqrt{N} = 9,46117.60$	$\frac{D'}{2} = 54^\circ.13'.51'',6$
$l\cos b = 9,96065.89$	$l\cos e = 9,93519.20$	$D' = 108.\ 27.\ 43.$
$l\cos L' = 9,76152.93$	$l\sin\Phi = 9,52598.40$	$D = 108.\ 42.\ 3.$
$l\cos S' = 9,99734.39$	$l\cos\Phi = 9,97403.24$	$\delta = -\ 14'.20''.$
$l\sec L = 0,23286.68$	$l\cos e = 9,93519.20$	
$l\sec S = 0,00276.58$	$l\sin\frac{D'}{2} = 9,90922.44$	
$\log N = 8,92235.21$		

Calcul suivant la formule (N).

$\log\cos 2e = 9,68478.40$ $\quad l\cos D' = 9,50061.44$ (neg.)

$\cos 2e = 0,48393.17$ $\quad D' = 108^\circ\,27'\,43''$,

$2N = 0,16725.62$ $\quad$ précisément la même valeur qu'a don-

$\cos D' = -0,31667.55$ $\quad$ née la méthode de *Borda*.

Calcul suivant la formule (D). Je ferai pour abréger,

$$\frac{(p-l)\,\mathrm{tg}\,L}{\mathrm{tang}\,D} = A,\quad \frac{(p-l)\sin S}{\sin D\cos L} = B,\quad \frac{s.\sin L}{\sin D\cos S} = C,\quad \frac{s\,\mathrm{tg}\,S}{\mathrm{tang}\,D} = E,$$

$$\frac{(p-l)\cot D}{\cos L} = h,\quad \frac{s\cot D}{\cos S} = k,\quad \frac{2M\sin(p-l)}{\sin^2 D\cos L} = n,$$

$$\frac{2M\sin s}{\sin^2 D\cos S} = q,\quad \frac{4M\sin(p-l)}{\sin^2 D\cos D\cos L}\ \text{ou}\ \frac{2n}{\cos D} = r;$$

de sorte qu'on aura, par l'équation (E),

$$\delta = A - B + C - E.$$

Pour compléter l'équation (D), il faut ajouter les termes dépendans de M, savoir

$$hn + kq + kr = \frac{An}{\sin L} + \frac{E}{\sin S}\left(q + \frac{2n}{\cos D}\right).$$

$\log(p-l) = 3,27898.21$	$\log(p-l) = 3,27898.21$
$l\,\mathrm{tang}\,L = 0,14191.73$	$l\sin S = 9,05115.22$
$l\cot D = 9,52955.55$ (neg.)	$l\,\mathrm{cosec}\,D = 0,02355.57$
$\log A = 2,95045.49$ (neg.)	$l\sec L = 0,23286.68$
$\log s = 2,66745.30$	$\log B = 2.58655.68$
$l\sin L = 9,90905.04$	$\log s = 2,66745.30$
$l\,\mathrm{cosec}\,D = 0,02355.57$	$l\,\mathrm{tang}\,S = 9,05391.80$
$l\sec S = 0,00276.58$	$l\cot D = 9,52955.55$ (neg.)
$\log C = 2,60282.49$	$\log E = 1,25092.65$ (neg.)

$A = -\ 892'',185$	$C = +400'',705$	$\delta' = -859'',63$
$-B = -\ 385,973$	$-E = +\ 17,821$	$= -14'\,19'',63.$
$-1278,158$	$+418,526$	

$\log \cos a = 8,96718.74$	$\log 2M = 8,92485.08$	$\log 2M = 8,92485.08$
$l \cos b = 9,96065.89$	$l \sin (p - l) = 7,96455.08$	$l \sin s = 7,35302.75$
$l \sin c = 9,99075.59$	$l \operatorname{cosec}^2 D = 0,04711.14$	$l \operatorname{cosec}^2 D = 0,04711.14$
$l \sin d = 9,70521.86$	$l \sec L = 0,23286.68$	$l \sec S = 0,00276.58$
$\log M = 8,62382.08$	$\log n = 7,16937.98$	$\log q = 6,32775.55$
$\log 2n = 7,47040.98$	$\log A = 2,95045.49$ (neg.)	$l E = 1,25092.65$ (n.)
$l E = 1,25092.65$ (n.)	$l \operatorname{cosec} L = 0,09094.96$	$l \operatorname{cosec} S = 0,94884.78$
$l \operatorname{cosec} S = 0,94884.78$	$\log hn = 0,21078.43$ (n.)	$\log kq = 8.52752.98$ (n.)
$l \sec D = 0,49400.02$ (n.)	$hn = -1'',625$	
$\log kr = 0,16418.43$	$kq = -0,034$	
	$kr = +1,459$	
	$-0'',20$	

Ainsi la correction entière est $\delta = -14'19'',63 - 0''2 = -14'19''83$; qui ne diffère que de $0'',17$ de celle que donne la méthode précédente.

Comme la construction des tables a le but d'abréger le calcul, elles ne pourront jamais donner une parfaite exactitude. Si l'on se propose de réduire les formules précédentes en tables, on commencera par supposer $M = 0$, c'est-à-dire, on négligera les différentielles secondes de l'équation (A), ou ce qui revient au même, les carrés des réfractions et des parallaxes, en se bornant à l'équation (E), qui donne

$$\delta = A - B + C - E.$$

En désignant par A', B', C', E', ce que deviennent A, B, C, E, lorsque $p - l$ et s sont égales à $1'$ ou $60''$, et par u, v, les valeurs de $p - l$ et de s, exprimées en minutes et leurs fractions decimales, on aura en secondes,

$$A' = \frac{60 \operatorname{tg} L}{\operatorname{tang} D}, \quad B' = \frac{60 \sin S}{\sin D \cos L}, \quad C' = \frac{60 \sin L}{\sin D \cos S}, \quad E' = \frac{60 \operatorname{tg} S}{\operatorname{tg} D},$$

$$A = uA', \; B = uB', \; C = vC', \; E = vE',$$

ce qui donnera

$$\delta = v(C' - E') - u(B' - A').$$

On construira donc deux tables, dont chacune aura les deux argumens $D = \Phi$ et L ou $S = \psi$, Φ s'étendant depuis 20° jusqu'à 90°, et ψ de 4° ou 5° à 89°. La première donnera le quotient

$\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\phi}$, la seconde le quotient $\frac{\sin\psi}{\sin\phi}$, l'un et l'autre multiplié par 60. On tirera donc de la première A', en employant l'argument L, et E' en employant l'argument S; on trouvera dans la seconde table $C'\cos S = G$ avec l'argument L, et $B'\cos L = H$ avec l'argument S. Comme les nombres G, H, pourraient s'étendre depuis $60 \sin 5^\circ = 5''$ jusqu'à $\frac{60}{\sin 20^\circ} = 175''$, on construira une troisième table qui renfermera les quotiens des nombres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100,

divisés par les cosinus de tous les angles entre 5° et 89°. On tirera de cette table, B' avec les argumens H et L, et C' avec les argumens G et S. On connaîtra donc les quantités A', E', B', C', dont les deux dernières sont toujours positives, tandis que A' et E' deviendront negatives, lorsque $D > 90^\circ$. Cela donnera $C' \pm E'$ et $B' \pm A'$, selon que D est plus ou moins grand que 90°: on multipliera $C' \pm E'$ par v, et $B' \pm A'$ par u, et l'on aura $\delta = v\,(C' \pm E') - u\,(B' \pm A')$.

Comme cette méthode n'exige que trois tables, elle serait assés commode, mais il faut s'en servir avec une grande précaution, ainsi que des tables en général, qui ne sont que des approximations. Les termes du second ordre, qui dépendent de M, étant négligés dans la construction des tables, voyons à quoi peuvent monter ces termes que je désignerai par δ''. Pour cet effet il faut d'abord déterminer la relation qui existe entre D et L, S.

On peut donner à l'équation (B),

$$\cos D = \cos Z \cos L \cos S + \sin L \sin S,$$

les deux formes suivantes,

$$(1) \ldots \cos D = \cos (L - S) - (1 - \cos Z) \cos L \cos S,$$

$$(2) \ldots \cos D = (1 + \cos Z) \cos L \cos S - \cos (L + S).$$

Il suit de (1), que $\cos D$, étant positif, est toujours moindre que $\cos (L - S)$, donc $D > (L - S)$. Lorsque $\cos D$ est négatif, D,

étant $> 90°$, doit nécessairement être plus grand que $(L - S)$, parceque L, S, ne peuvent jamais surpasser $90°$. L'équation (2) donne, lorsque $D < 90°$, $\cos D = (1 + \cos Z) \cos L \cos S + \cos (180° - L - S)$, donc $\cos D > \cos (180° - L - S)$, et $D < 180° - (L + S)$. Si $D > 90°$, on a

(2) . . . $\cos (180° - D) = \cos (L + S) - (1 + \cos Z) \cos L \cos S$,

donc $180° - D > L + S$, et $D < 180° - (L + S)$. On tirera immédiatement les mêmes conclusions de la considération du triangle, formé par la lune, le soleil, et le zénit, dont les trois côtés sont D, $90° - L$, $90° - S$. En effet, dans tout triangle sphérique la somme de deux côtés quelconques étant plus grande que le troisième, on a

$$D + (90° - L) > (90° - S), \text{ et } (90° - L) + (90° - S) > D.$$

Il suit de la première condition, que

(3) . . . . D est toujours plus grand que $L - S$ ou $S - L$, et

de la seconde, que

(4) . . . . D est plus petit que $180° - (L + S)$.

On sait donc, que $L - S$ ou $S - L$ et $180° - (L + S)$ sont les deux limites, entre lesquelles D est toujours renfermé. Cela posé cherchons la plus grande valeur que δ'' peut avoir.

En faisant, pour abréger,

$$\frac{D}{2} = \eta, \quad \frac{L+S}{2} = x, \quad \frac{L-S}{2} \text{ ou } \frac{S-L}{2} = y,$$

on a par l'équation (G),

$$M = \cos (\eta + x) \cos (\eta - x) \sin (\eta + y) \sin (\eta - y).$$

En regardant donc D comme une quantité donnée, et faisant $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = 0$, on aura

$$0 = -\sin(\eta + x) \cos(\eta - x) + \cos(\eta + x) \sin(\eta - x) = -\sin 2x,$$
$$0 = \cos(\eta + y) \sin(\eta - y) - \sin(\eta + y) \cos(\eta - y) = -\sin 2y:$$

donc, afin que, pour une valeur quelconque de D, M devienne un *maximum*, il faut que x et y, ou ce qui revient au même, que

L et S soient nuls. En effet on a alors

$$M = \cos^2 \eta \sin^2 \eta,$$

ce qui est toujours plus grand que

$$\cos(\eta + x)\cos(\eta - x)\sin(\eta + y)\sin(\eta - y) =$$
$$(\cos^2\eta \cos^2 x - \sin^2\eta \sin^2 x)(\sin^2\eta \cos^2 y - \cos^2\eta \sin^2 y) =$$
$$(\cos^2\eta - \sin^2 x)(\sin^2\eta - \sin^2 y) =$$
$$\cos^2\eta \sin^2\eta - \cos^2\eta \sin^2 y - \sin^2 x(\sin^2\eta - \sin^2 y),$$

parceque $\eta > y$ en vertu de la condition (3). M aura donc sa plus grande valeur, lorsque L et S sont nuls, ou du moins aussi petits que possible. Comme on n'observe guère de hauteurs au-dessous de 5°, nous supposerons $L = S = 5^\circ$, donc $x = 5^\circ$, $y = 0$, et la plus grande valeur de M,

$$M' = \sin^2\eta \cos(\eta + 5^\circ)\cos(\eta - 5^\circ) = \tfrac{1}{2}\sin^2\eta(\cos 2\eta + \cos 10^\circ) =$$
$$\frac{(1 - \cos D)(\cos 10^\circ + \cos D)}{4} = \frac{\cos 10^\circ + \cos D(1 - \cos 10^\circ) - \cos^2 D}{4} =$$
$$0{,}2462 + 0{,}0038 \cdot \cos D - 0{,}25 \cdot \cos^2 D.$$

L étant $= 5^\circ$, $p - l$ peut monter à 52′, ce qui donne

$$\frac{2(p-l)^2}{\cos^2 L} = 1', 5612 = 93'', 7.$$

On aura donc le premier et le plus grand terme de δ'' dans l'équation (C),

$$\delta'' = \{23'',069 + 0'',356 \cos D - 23'',425 \cos^2 D\} \frac{\cos D}{\sin^3 D}.$$

En faisant, pour abréger

$$23{,}069 = \alpha,\ 0{,}356 = \beta,\ 23{,}425 = \gamma,\ \beta \text{ étant } = \gamma - \alpha,$$

on aura

$$\delta'' = \frac{\alpha \cos D + \beta \cos^2 D - \gamma \cos^3 D}{\sin^3 D},$$

ce qui donnera pour les *maxima* et *minima* de δ'',

$$\frac{\partial \delta''}{\partial D} = 0 = -\alpha \sin^2 D - 2\beta \sin^2 D \cos D + 3\gamma \sin^2 D \cos^2 D$$
$$- 3\cos^2 D(\alpha + \beta \cos D - \gamma \cos^2 D)$$
$$= -\alpha(1 + 2\cos^2 D) - \beta \cos D(2 + \cos^2 D) + 3\gamma \cos^3 D,$$

ou en faisant $\cos D = x$,

$$0 = x^3 - \frac{3\gamma - 2\alpha}{\beta} x^2 + 2x + \frac{\alpha}{\beta},$$

équation divisible par $x - 1$, à cause de $\beta = \gamma - \alpha$. Le quotient donnera l'équation $0 = x^2 - \frac{2\gamma - \alpha}{\beta} x - \frac{\alpha}{\beta}$, ou $0 = x^2 - 66{,}8\,x - 64{,}8$, dont les racines sont x ou $\cos D = 67{,}756$; et $x = -0{,}956$. La première étant impossible, on aura les deux valeurs

$$\cos D = 1\,,\quad \cos D = -0{,}956\,,\quad D = 0\,,\quad D = 162^\circ\,56',$$

distances qui ne sont jamais observées. Mais comme δ'' devient infini, lorsque $D = 0$, on voit que l'erreur peut être très-grande, si D est petit. Supposant p. ex. $D = 20^\circ$, ce qui est à peu près la plus petite distance qu'on observe, on aura $\delta'' = 64''$, ce qui sera encore augmenté par les deux autres termes de δ'', multipliés par s^2 et par $(p - l)\,s$. Telle est l'erreur qu'on peut commettre, en négligeant les termes dépendans de M, ou les carrés des réfractions et des parallaxes. C'est donc aussi l'erreur à laquelle sont sujettes les tables, dans la construction desquelles ces carrés sont négligés. M. *Horner* évite cette erreur, en introduisant l'angle $L' + \frac{1}{2}p$ au lieu de L'. Par ce moyen il tient effectivement compte du carré de la parallaxe, d'ou il vient que sa méthode donne presque toujours un résultat très-exact. Pour le faire voir par un exemple, je choisirai celui donné par *Delambre* (l. c. pag. 629.), où les valeurs de D, L, S, sont encore loin de celles qui donnent le *maximum* de l'erreur, savoir $D = 20^\circ$, $L = S = 5^\circ$. Les données sont

$D = 30^\circ, L = 18^\circ, S = 6^\circ, p = 58', l = 3', p - l = 55', s = 8'\,20''.$
$T = 12^\circ,\ L' = 18^\circ\,55',\ S' = 5^\circ\,51'\,40'',$
$a = 27^\circ,\ b = 3^\circ,\ c = 21^\circ,\ d = 9^\circ,\ e = 12^\circ\,23'\,20''.$

Calcul suivant la méthode de Borda, ou les formules (L) (M).

l cos a = 9,94988.09
l cos b = 9,99940.44
l cos L′ = 9,97588.70
l cos S′ = 9,99772.37
l sec L = 0,02179.37
l sec S = 0,00288.57
l N = 9,94707.54
l $\sqrt{N}$ = 9,97353.77
l cos e = 9,98976.74
l sin Φ = 9,98377.03

l cos Φ = 9,42871.43
l cos e = 9,98976.74
l sin $\frac{D'}{2}$ = 9,41848.17
$\frac{D'}{2}$ = 15°.11′.42″,8.
D′ = 30. 23. 25,6.
δ = + 23. 25,6.

Suivant notre méthode ou la formule (D).

l ($p-l$) = 3,51851.39
l tang L = 9,51177.60
l cot D = 0,23856.06
l A = 3,26885.05

l s = 2,69897.00
l sin L = 9,48998.24
l sec S = 0,00238.57
l cosec D = 0,30103.00
l C = 2,49236.81

l cos a = 9,94988.09
l cos b = 9,99940.44
l sin c = 9,55432.92
l sin d = 9,19433.24
l M = 8,69794.69

l 2 n = 8,12793.09
l E = 1,95915.08
l cosec S = 0,98076.54
l sec D = 0,06246.94
l Kr = 1,13031.65

l ($p-l$) = 3,51851.39
l sin S = 9,01923.46
l sec L = 0,02179.37
l cosec D = 0,30103.00
l B = 2,86057.22

l s = 2,69897.00
l tang S = 9,02162.02
l cot D = 0,23856.06
l E = 1,95915.08

l 8 M = 9,60103.69
l sin ($p-l$) = 8,20407.03
l sec L = 0,02179.37
l n = 7,82690.09
l A = 3,26885.05
l cosec S = 0,51001.76
l hn = 1,60576.90

l 8 M = 9,60103.69
l sin s = 7,38454.44
l sec S = 0,00238.57
l q = 6,98796.70
l E = 1,95915.08
l cosec S = 0,98076.54
l Kq = 9,92788.32

A = 1857″,165
C = 310, 720
+ 2167, 885
− 816, 414
δ' = + 1351″,471 = + 22′ 31″,471
δ'' = + 54, 689
δ = + 23′ 26″, 16;

B = 725″,391
E = 91, 023
816, 414

hn = 40″,343
Kg = 0, 847
Kr = 13, 499
δ'' = + 54″,689

ce qui est à une demi-seconde près la même valeur, que celle que nous avons trouvée par la méthode de Borda. L'erreur qu'on aurait commise, en négligeant les termes du second ordre, est = 54″, 7.

La formule (H), sur laquelle M. *Horner* a construit ses tables pour la correction, due aux réfractions, donne ce qui suit.

$L' = L - l = 17^\circ\ 57'$, $S' = 5^\circ\ 51'\ 40''$, $s - l = 5'\ 20'' = 320''$

$l \cos L' = 9{,}97832.93$	$\cos T = 0{,}97814.76$	$l\,(s-l) = 2{,}50515.00$
$l \cos S' = 9{,}99772.37$	$\cos D = 0{,}86602.54$	$l \sin T = 9{,}31787.89$
$l \sec L = 0{,}02179.37$	$0{,}11212.22$	$l\ \mathrm{cosec}\, D = 0{,}30103.00$
$l \sec S = 0{,}00238.57$	$9{,}04969.16$	l II partie $= 2{,}12405.89$
$l\, m = 0{,}00023.24$	$l\,(m-1) = 6{,}72859.72$	II $= 133'',063$
$m - 1 = 0{,}00053.53$	$l\ \mathrm{cosec}\, D = 0{,}30103.00$	I $= 24,\ 760$
	$l\ \mathrm{cosec}\, 1'' = 5{,}31442.51$	$\delta' = +157'',823$
	l I. partie $= 1{,}39374.39$	$D' = 30^\circ\ 2'\ 37'',8.$

Pour trouver la correction δ'', due à la parallaxe, M. *Horner* emploie la formule

$$(P) \ldots\ldots \delta'' = \frac{p' (\sin (L' + \tfrac{1}{2}\beta) \cos D' - \sin S')}{\sin \tfrac{1}{2} (D' + D'')},$$

p' étant la parallaxe horisontale de la lune, et $D'' = D' + \delta''$. Or δ'' étant inconnu, l'équation (P) ne peut être résolue que par des approximations. Pour cet effet on a $p = 58'$, donc $p' = \frac{p}{\cos L'} = 3658'', 05$. Cela donne, en faisant, pour abréger, $L' + \frac{1}{2} p = (L)$, $p' \sin (L) \cos D' = I$, $p' \sin S' = II$, $\frac{I}{\sin D'} = \mu$, $\frac{II}{\sin D'} = \nu$, $\frac{I}{\sin \frac{1}{2} (D' + D'')} = \mu'$, $\frac{II}{\sin \frac{1}{2} (D' + D'')} = \nu'$,

$l\, p' = 3{,}56325.00$	$l\, p' = 3{,}56325.00$	$\mu = 1999'',9$
$l \sin (L) = 9{,}49996.33$	$l \sin S' = 9{,}00909.96$	$\nu = 746,\ 1$
$l \cos D' = 9{,}93733.87$	l II $= 2{,}57234.06$	$\delta'' = +1253'',8 = 20'53'',8.$
l I $= 3{,}00055.20$	$l \sin D' = 9{,}69954.57$	valeur incorrecte.
$l \sin D' = 9{,}69954.57$	$l\, \nu = 2{,}87280.39$	$D' = 30^\circ.\ 2'.37'',8.$
$l\, \mu = 3{,}30100.63$		$\delta'' = 20.\ 53,\ 8.$
		$D'' = 30.\ 23.\ 31,\ 6$
l I $= 3{,}00055.20$	l II $= 2{,}57234.96$	$\frac{D' + D''}{2} = 30^\circ.13.\ \ 4,7$
$l \sin \frac{D' + D''}{2} = 9{,}70182.02$	$l \sin \frac{D' + D''}{2} = 9{,}70182.02$	$\mu' = 1989',44$
$l\, \mu' = 3{,}29873.18$	$l\, \nu' = 2{,}87052.94$	$\nu' = 742,\ 21$
		$\delta'' = 1247,\ 23$
		valeur corrigée.

δ'	$= 2'.\ 37'',8$	
δ''	$= 20.\ 47,\ 2$	
δ	$= 23.\ 25,\ 0.$	correction entière.
	$23.\ 26,\ 2.$	valeur exacte.
	$1'',2.$	erreur des tables.

Si l'on eût employé L' au lieu de (L), comme cela se fait dans plusieurs tables, l'erreur eût été beaucoup plus considérable. On voit donc, que ce n'est qu'avec beaucoup de précaution, qu'on doit se servir des tables en général.

IV.

DE L'ACCOURCISSEMENT DES DIAMÈTRES APPARENS DU SOLEIL ET DE LA LUNE CAUSÉ PAR LA RÉFRACTION.

Présenté à l'Académie le 11. Mai 1825.

§. 1. Le demi-diamètre du soleil ou de la lune, qu'on prend dans les Ephémérides, et que je désignerai par R', est celui qu'on verrait du centre de la terre. La parallaxe le fait paraître plus grand à un observateur, placé à la surface du globe, tandis que la réfraction le diminue. Le premier effet n'est sensible que pour la lune, mais le dernier est de même grandeur pour les deux astres. Je nommerai R'' le demi-diamètre, altéré par la parallaxe, R et r les demi-diamètres, tels que les fait paraître la réfraction, R étant parallèle à l'horison, r étant incliné sous un angle quelconque.

§. 2. Si l'on désigne par α la distance apparente de la lune au zénit, l'augmentation de son demi-diamètre sera (*)

$$(\text{I}) \ldots . R'' - R' = 3{,}66394\, R' \{ R' \cos\alpha + 0{,}916\, R'^2 (3 + \cos 2\alpha) \} = z.$$

C'est sur cette formule, que j'ai calculé la *Table I* qui, par conséquent, a deux argumens, α et R'. Comme elle est plus exacte que celles qu'on avait calculées jusqu'à présent pour cet effet, il ne m'a pas paru inutile de l'insérer ici, quoiqu'elle soit étrangère à notre sujet.

(*) Voy. mon *Traité d'Astron. Théor. Tome II*, §. 216.

§. 3. Pour déterminer l'effet de la réfraction λ, j'emploierai la formule, donnée par M. de Laplace (*), pour des hauteurs plus grandes que dix degrés; et comme il serait inutile dans cette recherche, de tenir compte des corrections, dues au thermomètre et au baromètre, je supposerai la hauteur moyenne du baromètre de 28 pouces ou 0,76 mètres, et le thermomètre Réaumur à +8 degrés; ce qui revient à supposer, dans la formule de M. de Laplace, $y = 0$ et $x = 10$; d'où il viendra

$$\lambda = \frac{0{,}000293876}{1{,}0375}\,\mathrm{tang}\,\alpha + \frac{(0{,}000293876)^2}{2\,(1{,}0375)^2}\,\mathrm{tang}\,\alpha\,(3 + \mathrm{tang}^2\,\alpha)$$
$$- 0{,}000293876 \times 0{,}00125254\,\mathrm{tang}\,\alpha\,\sec^2\alpha,$$

ou bien

$$(1)\ldots\lambda = \mathrm{tang}\,\alpha\,\{0{,}000283006234 - 0{,}000000327975\,\mathrm{tang}^2\alpha\},$$

et en secondes

$$(2)\ldots\ldots\lambda = \mathrm{tang}\,\alpha\,(58'',37423 - 0'',06765\ \mathrm{tang}^2\,\alpha).$$

§. 4. Considérons maintenant le diamètre, parallèle à l'horison, dont les deux extrémités sont également élevées par la réfraction, ensorte que chacune demeure dans le même cercle vertical. En nommant donc α' la distance vraie au zénit, ou plutôt celle qui aurait lieu sans l'effet de la réfraction, et α la distance altérée par elle, on aura

$$R = R''\,\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'},$$

et à cause de $\alpha' = \alpha + \lambda$,

$$R = \frac{R''}{\cos\lambda + \cot\alpha\,\sin\lambda}.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$0{,}000283006234 = a,\quad 0{,}000000327975 = b,$$

ou en secondes

$$58'',37423 = a'',\quad 0'',06765 = b'',$$

l'équation (1) deviendra $\lambda = a\,\mathrm{tang}\,\alpha - b\ \mathrm{tang}^3\,\alpha$; et même en

(*) *Mécanique Céleste, Tome IV, pag.* 271.

faisant $\alpha = 80°$, on aura, sans se tromper de la dix-millième partie d'une seconde,

$$\cos\lambda = 1 - \frac{a^2}{2}\,\text{tang}^2\alpha + ab\,\text{tang}^4\alpha,\quad \sin\lambda = a\,\text{tang}\,\alpha - b\,\text{tang}^3\alpha.$$

En faisant donc, pour abréger,

$$\frac{\frac{1}{2}a^2 + b}{1+a} = A,\quad \frac{ab}{1+a} = B,$$

l'équation précédente donnera

$$R = \frac{R''}{(1+a)(1-A\,\text{tg}^2\alpha + B\,\text{tg}^4\alpha)} = \frac{R''}{1+a}\left\{1 + A\,\text{tg}^2\alpha + (A^2 - B)\,\text{tg}^4\alpha\right\} =$$

$$R''(1 - 0{,}0002829261 6.4)(1 + 0{,}00000036791 7\,\text{tg}^2\alpha - 0{,}000000000093\,\text{tg}^4\alpha) =$$

$$R''(1 - 0{,}000282926 + 0{,}0000003678\,\text{tg}^2\alpha - 0{,}000000000093\,\text{tg}^4\alpha).$$

Le dernier terme ne monte pas à $0'',0001$, lorsque R'' et α ont leurs plus grandes valeurs de $17'$ et de $80°$. Il en est de même du second terme, lorsque α est plus petit que $27°$. On a donc

l'accourcissement du demi-diamètre horisontal, causé par la réfraction,

$$\text{(II)} \ldots R'' - R = R''(0{,}000282926 - 0{,}0000003678\,\text{tg}^2\alpha) = y,$$

et pour les hauteurs qui sont plus grandes que $45°$,

$$y = R''.\,0{,}000282926\,;$$

ce qui fait environ une demie-seconde pour le diamètre entier.

§. 5. Après avoir trouvé le demi-diamètre R qui est parallèle à l'horison, il sera facile de déterminer le demi-diamètre
Fig. 8. incliné r. Soit ADBE un cercle, décrit avec le rayon $CA = CB = CD = CE = R$, et AFNBRG le disque du soleil ou de la lune tel qu'il paraît par l'effet de la réfraction. En désignant par λ', λ'', μ', μ'', les réfractions, dues aux hauteurs des points E, D, Q, M, et faisant $\lambda' - \lambda'' = \varrho$, $\mu' - \mu'' = \sigma$, on aura

$$FG = DE - \varrho = 2R - \varrho,\quad NR = MQ - \sigma.$$

Faisons pour abréger, $\frac{\varrho}{2R} = \delta$, $\frac{\sigma}{MQ} = \varepsilon$, ce qui donnera

$$CF = R(1 - \delta),\ PN = PM(1 - \varepsilon).$$

Mais on peut supposer sans aucune erreur sensible, que dans toute l'étendue du disque les variations des réfractions sont proportionelles à celles des hauteurs; supposition qu'on fait effectivement, en interpolant les tables de réfraction. Cela donne

$$\varrho : \sigma = 2R : MQ,\ \text{donc } \varepsilon = \delta \text{ et } PN = PM(1 - \delta).$$

L'équation du cercle est

$$PM^2 = R^2 - CP^2:$$

en faisant donc

$$CP = x,\ PN = y,$$

on aura

$$(3) \ldots\ y^2 = (1 - \delta)^2 (R^2 - x^2).$$

En désignant par η l'angle NCF que le rayon incliné CN ou r fait avec le vertical, on aura

$$x = r \sin \eta,\ y = r \cos \eta,$$

ce qui étant substitué dans l'équation (3), donnera

$$r^2 (\cos^2 \eta + (1 - \delta)^2 \sin^2 \eta) = (1 - \delta)^2 R^2,$$

ou bien

$$r^2 = \frac{(1-\delta)^2 R^2}{(1-\delta)^2 + \delta(2-\delta)\cos^2\eta},$$

d'où l'on tirera, en négligeant le cube de δ,

$$r = R\left(1 + \frac{\delta(2-\delta)}{(1-\delta)^2}\cos^2\eta\right)^{-\frac{1}{2}} = R\left(1 - \frac{\delta(2-\delta)\cos^2\eta}{2(1-\delta)^2} + \frac{3\delta^2\cos^4\eta}{2(1-\delta)^4}\right).$$

En effet, puisque je n'étendrai pas la table à des hauteurs au-dessous de dix degrés, δ aura sa plus grande valeur, lorsque $\alpha = 80°$; et avec cette distance zénitale on trouvera dans les tables de réfractions $\delta = 0,009$, donc $\delta^3 = 0,000000729$, ce qui étant multiplié par $17'$, le *maximum* de R, donnera $\delta^3 R = 0'', 0007$. La dernière équation deviendra donc

$$r = R\left\{1 - \delta\left(1 - \tfrac{\delta}{2}\right)(1 + 2\delta)\cos^2\eta + \tfrac{3}{2}\delta^2\cos^4\eta\right\} =$$
$$R\left(1 - \delta\cos^2\eta - \tfrac{3}{2}\delta^2\sin^2\eta\cos^2\eta\right);$$

d'où l'on conclura

l'*accourcissement du demi-diamètre incliné, causé par la réfraction* R — r, ou

(III) . . . . $x = R\delta \cos^2 \eta \, (1 + \frac{3}{2}\delta \sin^2 \eta)$.

L'angle η est toujours connu. En effet, puisque c'est principalement dans les observations des distances lunaires, qu'on a besoin de la correction x, et que les distances ne sont d'aucune utilité sans les hauteurs des deux astres, observées ou calculées; on connaît dans le triangle, formé par les deux astres et le zénit, les trois côtés, ce qui donnera les angles aux astres, η. On prendra toujours l'angle η qui est moindre que 90°, parceque l'équation (III) ne contient que le carré de cos η; aussi la *figure* 8. montre, que l'angle NCG donne le même rayon CN que l'angle NCF.

§. 6. Il reste maintenant à déterminer $\delta = \frac{\varrho}{2R}$, 2R étant la variation de la hauteur, et ϱ celle de la réfraction qui lui appartient. On pourrait prendre ce rapport dans les tables de réfractions, pour chaque degré de hauteur; mais cela serait peu exact. En général, il est aisé de voir, que le rapport δ dépend principalement de la hauteur, mais qu'il dépend aussi de la grandeur du rayon R, quand on demande une précision parfaite; ou ce qui revient au même, δ n'est pas le simple rapport *différentiel* de la réfraction λ et de la distance zenitale α, lequel est indépendant de la grandeur de ces deux quantités, mais δ est le rapport entre leurs différences finies $\Delta\lambda$, $\Delta\alpha$, parcequ'il s'étend à tout le disque lunaire ou solaire, $\delta = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\alpha}$. On a donc par le théorème de Taylor:

$$\delta = \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} + \frac{\partial\partial\lambda}{\partial\alpha^2} \cdot \frac{\Delta\alpha}{2},$$

les termes suivans étant insensibles. Cela posé, l'équation (1) (§. 4.),

$$\lambda = \text{tang}\,\alpha\,(a - b\,\text{tg}^2\,\alpha),$$

étant différentiée, donnera

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = (1 + \text{tg}^2\,\alpha)\,(a - 3b\,\text{tg}^2\,\alpha),$$

$$\frac{\partial\partial\lambda}{\partial\alpha^2} = 2\sec^2\alpha\,\text{tang}\,\alpha\,(a - 3b - 6b\,\text{tang}^2\,\alpha),$$

d'où il vient

$$\delta = \sec^2\alpha\,\{a + (a - 3b)\,\Delta\alpha\,\text{tg}\,\alpha - 3b\,\text{tg}^2\,\alpha - 6b\,\Delta\alpha\,\text{tg}^3\,\alpha\},$$

$\Delta\alpha$ étant $= 2$ R. Cela donne

$$\delta = a + 2(a - 3b)\,\text{R tang}\,\alpha + (a - 3b)\,\text{tang}^2\,\alpha + 2\,(a - 9b)\,\text{R tg}^3\,\alpha - 3b\,\text{tg}^4\,\alpha - 12b\,\text{R tg}^5\,\alpha;$$

ou en faisant $a - 3b = f$, $2(a - 9b) = g$, $3b = h$, c'est-à-dire,

$f = 0{,}0002820223$, $g = 0{,}0005601089$, $h = 0{,}000000984$;

$$(4)\ldots.\delta = a + 2f\text{R tg}\,\alpha + f\,\text{tg}^2\,\alpha + g\text{R tg}^3\,\alpha - h\,\text{tg}^4\,\alpha - 4h\text{R tg}^5\,\alpha.$$

Comme il suffit de connaître la correction x à $0'',01$ près, et que x est toujours moindre que $\text{R}\delta = \delta\,.\,17'$, on pourra négliger plusieurs termes de l'équation (4), à moins que α ne soit très-grand. Pour la même raison on peut se dispenser de tenir compte de la grandeur particulière de R, dans les termes qui sont multipliés par R, lorsque α est petit. Dans un pareil cas, on prendra pour R une valeur moyenne $= 0{,}0045$; ce qui donnera

$$2f\text{R} = 0{,}000002625 = \text{A},\quad g\,\text{R} = 0{,}000002607 = \text{B},$$

$$4h\,\text{R} = 0{,}00000001832 = \text{C}.$$

On aura donc, depuis $\alpha = 1^\circ$ jusqu'à $\alpha = 40^\circ$,

$$(5)\ldots\delta = a + \text{A tg}\,\alpha + f\,\text{tg}^2\,\alpha + \text{B tg}^3\,\alpha - h\,\text{tg}^4\,\alpha - \text{C tg}^5\,\alpha,$$

et depuis $\alpha = 40^\circ$ jusqu'à $\alpha = 80^\circ$,

$$(6)\ldots.\delta = a + \text{A tg}\,\alpha + f\,\text{tg}^2\,\alpha + g\text{R tg}^3\,\alpha - h\,\text{tg}^4\,\alpha - 4h\text{R tg}^5\,\alpha.$$

§. 7. Quand on n'exige pas une précision parfaite, on peut prendre, dans les tables de réfractions celles qui répondent à la distance zénitale donnée α, et à $\alpha + 30'$: leur différence divisée par $30'$, sera à peu près $= \delta$. Prenons pour exemple les distances zénitales 80° et $80^\circ\,30'$, pour lesquelles les tables donnent les réfractions $\lambda' = 5'\,19'',8$ et $\lambda'' = 5'\,35'',9$; donc $\delta = \frac{16'',1}{30'} = 0{,}008944$. L'équation (6) donne $\delta = 0{,}008683816$ ou $\delta = 0{,}008741322$, selon que $\text{R} = 14'\,30''$ ou $\text{R} = 17'$.

En calculant la *Table II* sur la formule (II), et la *Table III* sur la formule (III), j'ai porté la précision jusqu'aux centièmes parties d'une seconde, parcequ'autrement l'interpolation de ces tables pourrait occasionner des erreurs de plus de 0″, 1.

TABLE I.

augmentation du demi-diamètre de la Lune causée par la Parallaxe.

Distance apparente au zénit.	Demi-diamètre de la Lune.					
	14′30″	15′0″	15′30″	16′0″	16.30″	17′0″
0°	13″,653	14″,618	15″,617	16″,650	17″,716	18″,816
2	13,645	14,610	15,608	16,640	17,705	18,804
4	13,620	14,583	15,579	16,609	17,673	18,770
6	13,578	14,538	15,532	16,558	17,619	18,713
8	13,520	14,476	15,465	16,488	17,543	18,633
10	13,445	14,396	15,380	16,397	17,447	18,530
12	13,354	14,299	15,276	16,286	17,329	18,405
14	13,247	14,184	15,153	16,155	17,190	18,257
16	13,124	14,052	15,013	16,005	17,030	18,087
18	12,985	13,903	14,853	15,835	16,849	17,895
20	12,830	13,738	14,676	15,646	16,648	17,682
22	12,659	13,555	14,481	15,438	16,427	17,446
24	12,473	13,355	14,268	15,211	16,185	17,190
26	12,272	13,140	14,038	14,966	15,925	16,914
28	12,056	12,909	13,791	14,703	15,644	16,616
30	11,825	12,662	13,527	14,422	15,345	16,298
32	11,581	12,400	13,248	14,123	15,028	15,961
34	11,321	12,122	12,951	13,807	14,691	15,604
36	11,049	11,831	12,639	13,475	14,338	15,228
38	10,763	11,524	12,312	13,127	13,967	14,835
40	10,464	11,204	11,970	12,762	13,579	14,423
44	9,829	10,524	11,244	11,988	12,756	13,548
48	9,147	9,794	10,464	11,157	11,871	12,609
52	8,421	9,017	9,634	10,271	10,930	11,609
56	7,655	8,197	8,758	9,338	9,937	10,555
60	6,852	7,338	7,840	8,360	8,896	9,450
64	6,018	6,444	6,886	7,343	7,814	8,301
68	5,155	5,521	5,900	6,292	6,696	7,114
72	4,269	4,572	4,887	5,211	5,548	5,894
80	2,442	2,617	2,799	2,987	3,181	3,381
90°	0″,104	0,″115	0″,127	0″,140	0″,153	0″,167

TABLE II.

Accourcissement du demi-diamètre horisontal du Soleil ou de la Lune, causé par la réfraction.

Distance au zénit	Demi-diamètre du Soleil ou de la Lune					
	14′30″	15′0″	15′30″	16′0″	16′30″	17′0″
0°	0″,246	0″,255	0″,263	0″,272	0″,280	0″,289
60	0,245	0,254	0,262	0,271	0,279	0,287
70	0,244	0,252	0,260	0,269	0,277	0,286
75	0,242	0,250	0,258	0,267	0,275	0,283
80	0″,236	0″,244	0″,252	0″,260	0″,268	0″,277

TABLE III.

Accourcissement du demi-diamètre incliné du Soleil ou de la Lune, causé par la réfraction.

Distance apparente au zénit.	Inclinaison du diamètre au cercle vertical.									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
le demi-diam. étant = 14′30″										
0°	0″,246	0″,239	0″,217	0″,185	0″,145	0″,102	0″,062	0″,029	0″,007	0″,000
10	0,254	0,247	0,225	0,194	0,149	0,105	0,064	0,030	0,008	0,000
15	0,264	0,256	0,234	0,198	0,155	0,109	0,066	0,031	0,008	0,000
20	0,280	0,271	0,247	0,210	0,164	0,116	0,070	0,033	0,008	0,000
25	0,301	0,292	0,266	0,226	0,177	0,124	0,082	0,035	0,009	0,000
30	0,330	0,320	0,291	0,247	0,193	0,136	0,092	0,039	0,010	0,000
35	0,369	0,358	0,326	0,277	0,216	0,152	0,105	0,043	0,011	0,000
40	0,422	0,409	0,372	0,316	0,248	0,174	0,075	0,049	0,013	0,000
45	0,495	0,480	0,437	0,371	0,291	0,205	0,124	0,058	0,015	0,000
50	0,599	0,581	0,529	0,450	0,352	0,248	0,150	0,070	0,018	0,000
55	0,753	0,730	0,665	0,565	0,442	0,311	0,188	0,088	0,023	0,000
60	0,990	0,960	0,874	0,742	0,581	0,409	0,247	0,116	0,030	0,000
65	1″,383	1″,341	1″,221	1″,037	0″,812	0″,572	0″,376	0″,162	0″,042	0″,000
le demi-diam. étant = 15′0″										
0	0″,255	0″,247	0″,225	0″,191	0″,149	0″,105	0″,064	0″,030	0″,008	0″,000
10	0,263	0,255	0,232	0,197	0,154	0,109	0,066	0,031	0,008	0,000
15	0,274	0,265	0,242	0,205	0,161	0,113	0,068	0,032	0,008	0,000
20	0,289	0,281	0,255	0,217	0,170	0,120	0,072	0,034	0,009	0,000
25	0,311	0,302	0,275	0,233	0,183	0,129	0,078	0,036	0,009	0,000
30	0,341	0,331	0,301	0,256	0,200	0,141	0,085	0,040	0,010	0,000
35	0,381	0,370	0,337	0,286	0,224	0,158	0,095	0,045	0,012	0,000
40	0,436	0,423	0,385	0,327	0,256	0,180	0,109	0,051	0,013	0,000
45	0,512	0,497	0,452	0,384	0,301	0,212	0,128	0,060	0,015	0,000
50	0,620	0,601	0,548	0,465	0,364	0,256	0,155	0,072	0,019	0,000
55	0,779	0,755	0,688	0,584	0,457	0,322	0,195	0,091	0,023	0,000
60	1,024	0,998	0,904	0,768	0,601	0,423	0,255	0,120	0,031	0,000
65	1″,430	1″,387	1″,263	1″,073	0″,840	0″,592	0″,358	0″,467	0″,043	0″,000
le demi-diam. étant = 15′30″										
0°	0″,263	0″,255	0″,232	0″,197	0″,154	0″,109	0″,066	0″,031	0″,008	0″,000
10	0,272	0,264	0,240	0,204	0,159	0,112	0,068	0,032	0,008	0,000
15	0,283	0,274	0,250	0,212	0,166	0,117	0,071	0,033	0,009	0,000
20	0,299	0,290	0,264	0,224	0,175	0,124	0,075	0,035	0,009	0,000
25	0,322	0,312	0,284	0,241	0,189	0,133	0,080	0,038	0,010	0,000
30	0,352	0,342	0,311	0,264	0,207	0,146	0,088	0,041	0,011	0,000
35	0,394	0,382	0,348	0,296	0,231	0,163	0,099	0,046	0,012	0,000
40	0,454	0,437	0,398	0,338	0,265	0,186	0,113	0,053	0,014	0,000
45	0,529	0,513	0,467	0,397	0,311	0,219	0,132	0,062	0,016	0,000
50	0,641	0,621	0,566	0,481	0,376	0,265	0,160	0,075	0,019	0,000
55	0,805	0,780	0,710	0,603	0,472	0,332	0,201	0,094	0,024	0,000
60	1,058	1,026	0,934	0,794	0,621	0,437	0,264	0,124	0,032	0,000
65°	1″,478	1″,433	1″,305	1″,109	0″,868	0″,612	0″,369	0″,173	0″,045	0″,000

Suite de la TABLE III.

Distance apparente au zenit	Inclinaison du diamètre au cercle vertical									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
le demi-diam. étant = 16′0″										
0°	0″,272	0″,263	0″,240	0″,204	0″,159	0″,112	0″,068	0″,032	0″,008	0″,000
10	0,280	0,272	0,248	0,210	0,165	0,116	0,070	0,033	0,008	0,000
15	0,292	0,283	0,258	0,219	0,171	0,121	0,073	0,034	0,009	0,000
20	0,309	0,299	0,272	0,231	0,181	0,128	0,077	0,036	0,009	0,000
25	0,332	0,322	0,293	0,249	0,195	0,137	0,083	0,039	0,010	0,000
30	0,364	0,353	0,321	0,273	0,213	0,150	0,091	0,043	0,011	0,000
35	0,407	0,395	0,359	0,305	0,239	0,168	0,102	0,048	0,012	0,000
40	0,465	0,451	0,411	0,349	0,273	0,192	0,116	0,054	0,014	0,000
45	0,546	0,530	0,483	0,410	0,321	0,226	0,137	0,064	0,016	0,000
50	0,661	0,641	0,584	0,496	0,388	0,273	0,165	0,077	0,020	0,000
55	0,831	0,805	0,733	0,623	0,487	0,343	0,208	0,097	0,025	0,000
60	1,092	1,059	0,964	0,819	0,641	0,451	0,272	0,128	0,033	0,000
65°	1″,526	1″,480	1″,347	1″,145	0″,896	0″,631	0″,381	0″,178	0″,046	0″,000
le demi-diam. étant = 16′30″										
0°	0″,280	0″,272	0″,247	0″,210	0″,164	0″,116	0″,070	0″,033	0″,008	0″,000
10	0,289	0,281	0,255	0,217	0,170	0,120	0,072	0,034	0,009	0,000
15	0,301	0,292	0,266	0,226	0,177	0,124	0,075	0,035	0,009	0,000
20	0,318	0,309	0,281	0,239	0,187	0,132	0,079	0,037	0,010	0,000
25	0,342	0,332	0,302	0,257	0,201	0,141	0,086	0,040	0,010	0,000
30	0,375	0,364	0,331	0,281	0,220	0,155	0,094	0,044	0,011	0,000
35	0,419	0,407	0,371	0,315	0,246	0,173	0,105	0,049	0,013	0,000
40	0,480	0,465	0,424	0,360	0,282	0,198	0,120	0,056	0,014	0,000
45	0,563	0,546	0,498	0,423	0,331	0,233	0,141	0,066	0,017	0,000
50	0,682	0,661	0,602	0,512	0,400	0,282	0,170	0,080	0,020	0,000
55	0,857	0,831	0,756	0,642	0,503	0,354	0,214	0,100	0,026	0,000
60	1,126	1,092	0,995	0,845	0,661	0,465	0,281	0,132	0,034	0,000
65	1″,573	1″,526	1″,389	1″,180	0″,924	0″,651	0″,393	0″,184	0″,047	0″,000
le demi-diam. étant = 17′0″										
0°	0″,289	0″,280	0″,225	0″,217	0″,169	0″,119	0″,072	0″,034	0″,009	0″,000
10	0,298	0,289	0,263	0,224	0,175	0,123	0,075	0,035	0,009	0,000
15	0,310	0,301	0,274	0,233	0,182	0,128	0,077	0,036	0,009	0,000
20	0,328	0,318	0,288	0,246	0,192	0,135	0,082	0,038	0,010	0,000
25	0,353	0,342	0,311	0,265	0,207	0,146	0,088	0,041	0,011	0,000
30	0,386	0,375	0,341	0,290	0,227	0,160	0,097	0,045	0,012	0,000
35	0,432	0,419	0,392	0,324	0,254	0,179	0,108	0,050	0,013	0,000
40	0,494	0,480	0,437	0,371	0,290	0,204	0,124	0,058	0,015	0,000
45	0,581	0,568	0,513	0,435	0,341	0,240	0,145	0,068	0,018	0,000
50	0,703	0,682	0,621	0,527	0,412	0,290	0,176	0,082	0,021	0,000
55	0,882	0,856	0,779	0,662	0,518	0,365	0,221	0,103	0,027	0,000
60	1,160	1,125	1,025	0,870	0,681	0,480	0,289	0,136	0,035	0,000
65	1″,621	1″,431	1″,431	1″,216	0″,952	0″,671	0″,405	0″,190	0″,049	0″,000

		Le demi-diamètre étant = 16′30″							Le demi-diamètre étant = 17′0″						
		Distance apparente au zénit							Distance apparente au zenit						
	80°	65°	69°	72°	74°	76°	78°	80°	65°	69°	72°	74°	76°	78°	80°
3	8″,370	1″,573	2″,182	2″,918	3″,644	4″,682	6″,229	8″,644	1″,621	2″,250	3″,009	3″,758	4″,829	6″,426	8″,918
4	8,329	1,566	2,171	2,904	3,627	4,660	6,199	8,601	1,613	2,239	2,994	3,740	4,806	6,395	8,874
5	8,208	1,543	2,140	2,858	3,574	4,592	6,109	8,476	1,590	2,206	2,951	3,686	4,736	6,301	8,745
5	8,013	1,505	2,088	2,792	3,487	4,481	5,962	8,275	1,551	2,152	2,879	3,596	4,621	6,150	8,537
[illegible]	7,742	1,454	2,016	2,696	3,368	4,329	5,760	7,995	1,498	2,079	2,780	3,473	4,465	5,942	8,248
[illegible]	7,403	1,389	1,927	2,578	3,220	4,138	5,507	7,644	1,431	1,987	2,658	3,321	4,268	5,680	7,887
[illegible]	7,001	1,313	1,822	2,437	3,044	3,912	5,207	7,230	1,353	1,878	2,513	3,139	4,035	5,371	7,459
[illegible]	6,544	1,227	1,702	2,277	2,844	3,656	4,866	6,758	1,264	1,755	2,348	2,933	3,771	5,020	6,972
1	6,042	1,132	1,571	2,101	2,625	3,374	4,492	6,239	1,167	1,620	2,167	2,707	3,480	4,634	6,437
2	5,503	1,031	1,430	1,913	2,390	3,072	4,090	5,683	1,062	1,474	1,972	2,464	3,169	4,219	5,863
[illegible]	4,938	0,924	1,282	1,716	2,144	2,756	3,670	5,100	0,952	1,322	1,769	2,211	2,842	3,785	5,261
[illegible]	4,358	0,815	1,131	1,513	1,891	2,431	3,238	4,501	0,840	1,166	1,560	1,950	2,507	3,340	4,643
[illegible]	3,775	0,705	0,979	1,310	1,637	2,105	2,804	3,898	0,727	1,009	1,350	1,688	2,171	2,892	4,022
[illegible]	3,198	0,597	0,829	1,109	1,386	1,783	2,375	3,303	0,615	0,854	1,144	1,429	1,839	2,450	3,407
[illegible]	2,641	0,493	0,684	0,915	1,144	1,471	1,960	2,727	0,508	0,705	0,944	1,180	1,517	2,022	2,814
[illegible]	2,113	0,393	0,547	0,732	0,915	1,177	1,569	2,182	0,405	0,564	0,755	0,943	1,214	1,618	2,252
[illegible]	1,625	0,302	0,420	0,563	0,703	0,905	1,206	1,679	0,312	0,434	0,580	0,725	0,934	1,244	1,732
[illegible]	1,188	0,221	0,306	0,411	0,514	0,661	0,881	1,227	0,227	0,316	0,424	0,530	0,682	0,909	1,265
[illegible]	0,809	0,150	0,208	0,279	0,350	0,450	0,600	0,835	0,155	0,215	0,287	0,361	0,464	0,619	0,861
[illegible]	0,496	0,092	0,128	0,171	0,214	0,276	0,368	0,512	0,095	0,132	0,176	0,221	0,284	0,379	0,528
[illegible]	0,252	0,047	0,066	0,088	0,110	0,141	0,188	0,261	0,049	0,068	0,091	0,113	0,145	0,194	0,269
[illegible]	0,162	0,030	0,042	0,057	0,071	0,091	0,121	0,167	0,031	0,044	0,058	0,073	0,094	0,124	0,173
[illegible]	0,091	0,017	0,024	0,032	0,040	0,051	0,068	0,094	0,018	0,025	0,033	0,041	0,053	0,070	0,097
[illegible]	0,041	0,008	0,011	0,014	0,018	0,023	0,030	0,042	0,008	0,011	0,015	0,018	0,024	0,031	0,043
[illegible]	0,010	0,002	0,003	0,004	0,004	0,006	0,008	0,011	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,008	0,011
[illegible]	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000

COMMENTATIONES

Cel. N. FUSS.

I.

DEMONSTRATIO

THEOREMATUM QUORUNDAM POLYGONOMETRICORUM.

Conventui exhibita die 28. Nov. 1810.

§. 1. Ex eo tempore quo Calculus Sinuum, a summo Eulero primum in Analysin translatus, magis excoli coepit, plurimas sane proprietates Polygonorum multo concinnius et facilius generaliter investigare et demonstrare licuit, quam ullo alio modo ante, pro numero laterum indefinito, fieri potuerat. Hujus asserti exempla quisque in promptu habebit; nemini enim, ut unicum adferam, non statim in mentem veniet Theorema illud famosum, a Cotesio (1) olim sine demonstratione propositum, postea vero, primum a Moivreo (2), dein a Johanne Bernoulli (3), ab utroque generaliter, et multo post a celeberrimo quondam apud Tubingenses Professore,

(1) Opuscula Rogeri Cotesii.

(2) Mém. de l'Acad. Royale des Sciences.

(3) J. Bernoulli Opera omnia. Tom. IV, pag. 67.

G. W. Krafft ([1]), pro Tetragono, pro Hexagono et pro Octogono demonstratum, cujus Theorematis veritas nunc ope resolutionis formulae: $a^n - z^n$ in factores trinomiales formae: $aa - 2az . \cos. \frac{2i\pi}{n} + zz$ fere sine calculo, in genere, unoque quasi calami tractu, demonstratur.

§. 2. Ex novissimis porro Geometrarum inventis, circa summationem progressionum sinuum, cosinuum, arcuum in ratione arithmetica crescentium, nec non circa producta hujus modi sinuum vel cosinuum factis, plures proprietates Polygonorum regularium inveniri et demonstrari possunt, alias haud facilis indaginis, id quod plurimis exemplis confirmari posset, abunde autem patebit ex demonstratione sequentium trium theorematum:

I. In omni Polygono regulari n laterum productum ex omnibus diagonalibus ex angulo quolibet ductis et binis lateribus contiguis aequale est potestati $(n - 1)^{mae}$ radii circuli circumscripti tot sumptae quot sunt latera.

II. In omni Polygono regulari summa quadratorum omnium laterum et diagonalium aequalis est quadrato radii circuli circumscripti multiplicato per quadratum numeri laterum.

III. In omni Polygono regulari, si ex circuli circumscripti puncto quocunque ad angulos singulos rectae educantur, summa quadratorum harum rectarum aequalis est quadrato radii circuli circumscripti ducto in numerum laterum bis sumptum.

§. 3. Primum horum Theorematum illud ipsum est, cujus beneficio J. Bernoulli, loco citato, Theorema minus elegans Cotesianum demonstravit. Secundum Theorema Clarissimus L'Huilier ex natura centri gravitatis deduxit in Dissertatione: *Théorème sur les centres de gravité*, Tomo IV Novorum Actorum inserta pag. 50.

([1]) Nov. Comment. Acad. Scient. Imp. Petrop. Tom. I pag. 134.

In tertium denique, cum hanc memoratam dissertationem denuo nuper perlegerem, ipse incidi. Haec igitur Theoremata, methodo mihi familiari, ope Analyseos trigonometricae demonstrare in animum induxi. Ne autem lectores, in hoc calculi genere minus exercitatos, ad alios Auctores et libros ablegare simus coacti, propositiones praecipuas, quibus hic indigemus, in sequentibus Lemmatibus comprehendemus.

Lemma 1.

§. 4. *Denotante n numerum et Φ angulum quemcunque, semper erit:*

$$\sin. n\Phi = 2^{n-1} \sin. \Phi . \sin. (\tfrac{\pi}{n} - \Phi) . \sin. (\tfrac{\pi}{n} + \Phi) \times$$
$$\sin. (\tfrac{2\pi}{n} - \Phi) . \sin. (\tfrac{2\pi}{n} + \Phi) . \sin. (\tfrac{3\pi}{n} - \Phi). \text{ etc.}$$

existente numero horum factorum $= n$.

Demonstratio.

Ex elementis constat, posito

$$\cos. \Phi + \sqrt{-1} . \sin. \Phi = p$$
$$\cos. \Phi - \sqrt{-1} . \sin. \Phi = q,$$

esse $p^n - q^n = 2\sqrt{-1} . \sin. n\Phi$. Statuatur formulae $p^n - q^n$ factor duplex $pp - 2pq . \cos.\omega + qq = 0$, eritque $p = q . \cos.\omega \pm q . \sqrt{-1} . \sin.\omega$, hincque $p^n = q^n (\cos. n\omega \pm \sqrt{-1} . \sin. n\omega)$, ita ut sit

$$p^n - q^n = q^n (\cos. n\omega \pm \sqrt{-1} . \sin. n\omega - 1).$$

Cum igitur posuerimus $pp - 2pq . \cos. \omega + qq = 0$, indeque fiat $p^n - q^n = 0$, necessario esse debet $\cos. n\omega \pm \sqrt{-1} . \sin. n\omega = 1$, id quod evenit casibus $n\omega = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots 2i\pi$, ita ut factor duplex in genere fit $pp - 2pq . \cos. \frac{2i\pi}{n} + qq$. At vero est

$$pp + qq = 2 . \cos. 2\Phi \text{ et } pq = 1,$$

ideoque

$$pp - 2pq . \cos. \tfrac{2i\pi}{n} + qq = 2 \cos. 2\Phi - 2 \cos. \tfrac{2i\pi}{n}$$
$$= 2 \sin. (\tfrac{i\pi}{n} - \Phi) . 2 \sin. (\tfrac{i\pi}{n} + \Phi).$$

Quod si igitur loco i successive scribantur numeri 0, 1, 2, 3, etc. et loco primi factoris duplicis $pp - 2pq + qq$ tantum ejus radix $p - q = 2\sqrt{-1} . \sin. \Phi$, habebimus

$$p^n - q^n = 2\sqrt{-1} . \sin. n\Phi = 2\sqrt{-1} . \sin. \Phi \times 2 \sin. (\tfrac{\pi}{n} - \Phi) \times 2 \sin. (\tfrac{\pi}{n} + \Phi) \times 2 \sin. (\tfrac{2\pi}{n} - \Phi) \times 2 . \sin. (\tfrac{2\pi}{n} + \Phi) \times 2 . \sin. (\tfrac{3\pi}{n} - \Phi) \times 2 \sin. (\tfrac{3\pi}{n} + \Phi) \times \text{etc.}$$

quorum factorum numerus cum debeat esse n, erit

$$\sin. n\Phi = 2^{n-1} \sin. \Phi . \sin. (\tfrac{\pi}{n} - \Phi) \sin. (\tfrac{\pi}{n} + \Phi) . \sin. (\tfrac{2\pi}{n} - \Phi) \times \sin. (\tfrac{2\pi}{n} + \Phi) \text{ etc.}$$

Lemma 2.

§. 5. *Denotante Φ angulum et n numerum quemcunque, semper erit:*

$$\sin. \Phi^2 + \sin. 2\Phi^2 + \sin. 3\Phi^2 + \ldots . \sin. n\Phi^2 = \tfrac{n}{2} + \tfrac{1}{4} - \frac{\sin. (2n+1)\Phi}{4 \sin. \Phi}.$$

Demonstratio.

Cum posito $p = \cos. \Phi + \sqrt{-1} . \sin. \Phi$, $q = \cos. \Phi - \sqrt{-1} . \sin. \Phi$ sit

$$\sin. n\Phi = \frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}} \text{ et } \cos. n\Phi = \frac{p^n + q^n}{2},$$

erit $\sin. n\Phi^2 = \frac{p^{2n} - 2p^n q^n + q^{2n}}{-4}$,

sive, ob $pq = 1$, erit

$$\sin. n\Phi^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(p^{2n} + q^{2n}).$$

Hinc igitur si successive loco n scribatur 1, 2, 3, 4, etc. et series illa in Lemmate exposita littera s designetur, erit

$$s = \tfrac{n}{2} - \tfrac{1}{4} \begin{Bmatrix} p^2 + p^4 + p^6 \ldots\ldots p^{2n} \\ q^2 + q^4 + q^6 \ldots\ldots q^{2n} \end{Bmatrix}$$

sive

$$s = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\left[\frac{p^{2n+2} - p^2}{p^2 - 1} + \frac{q^{2n+2} - q^2}{q^2 - 1}\right].$$

Hoc postremum vinculum ad sequentem fractionem reduci se patitur:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{p^2 q^2 (p^{2n} + q^{2n} - 2) + p^2 + q^2 - p^{2n+2} - q^{2n+2}}{p^2 q^2 - p^2 - q^2 + 1}\right]$$

unde restituto angulo Φ prodit

$$s = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\left[\frac{\cos. 2n\Phi - 1 + \cos. 2\Phi - \cos. (2n+2)\Phi}{1 - \cos. 2\Phi}\right]$$

sive

$$s = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\left[\cos. 2n\Phi - 1 + \frac{\sin. 2n\Phi \,.\, \sin. 2\Phi}{1 - \cos. 2\Phi}\right]$$

sive

$$s = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left[\cos. 2n\Phi + \frac{\sin. 2n\Phi \,.\, \cos. \Phi}{\sin. \Phi}\right]$$

sive denique

$$s = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\sin. (2n+1)\Phi}{4 \sin. \Phi}.$$

Lemma 3.

§. 6. *Denotante n numerum et Φ angulum quemcunque, semper erit:*

$$\sin. \tfrac{1}{2}\Phi^2 + \sin. (\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{\pi}{n})^2 + \sin. (\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{2\pi}{n})^2 + \sin. (\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{3\pi}{n})^2 \ldots\ldots + \sin. (\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{(n-1)\pi}{n})^2 = \frac{n}{2}.$$

Demonstratio.

Cum sit

1°.) $\sin. \frac{1}{2}\Phi^2 = \frac{1 - \cos. \Phi}{2}$

2°.) $\sin. (\frac{1}{2}\Phi + \frac{\pi}{n})^2 = \frac{1 - \cos. (\Phi + \frac{2\pi}{n})}{2}$

$$3^{\circ}.)\quad \sin.(\tfrac{1}{2}\phi+\tfrac{2\pi}{n})^2=\frac{1-\cos.(\phi+\frac{4\pi}{n})}{2}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$n^{\circ}.)\quad \sin.(\tfrac{1}{2}\phi+\tfrac{(n-1)\pi}{n})^2=\frac{1-\cos.(\phi+\frac{2(n-1)\pi}{n})}{2},$$

erit summa nostrae seriei, quam littera s indicemus:

$$s=\tfrac{n}{2}-\tfrac{1}{2}[\cos.\phi+\cos.(\phi+\tfrac{2\pi}{n})+\cos.(\phi+\tfrac{4\pi}{n})\ldots$$
$$\cos.(\phi+\tfrac{2(n-1)\pi}{n})].$$

Statuatur

$$T=\cos.\phi+\cos.(\phi+\tfrac{2\pi}{n})+\cos.(\phi+\tfrac{4\pi}{n})\ldots\cos.(\phi+\tfrac{2(n-1)\pi}{n})$$

ducaturque haec series in $2\sin.\frac{\pi}{n}$ atque ob

$$2\sin.a.\cos.b=\sin.(a+b)+\sin.(a-b),\ \text{erit}$$

$$2T.\sin.\tfrac{\pi}{n}=\sin.(\tfrac{\pi}{n}-\phi)+\sin.(\phi+\tfrac{\pi}{n})+\sin.(\phi+\tfrac{3\pi}{n})$$
$$\ldots.+\sin.(\phi+\tfrac{(2n-1)\pi}{n})-\sin.(\phi+\tfrac{\pi}{n})-\sin.(\phi+\tfrac{3\pi}{n})\ldots.$$

ita ut deletis membris sese destruendis sit

$$2T.\sin.\tfrac{\pi}{n}=\sin.(\tfrac{\pi}{n}-\phi)+\sin.(\phi+\tfrac{(2n-1)\pi}{n}).$$

Est vero $\sin.(\phi+\frac{(2n-1)\pi}{n})=-\sin.(\frac{\pi}{n}-\phi)$, ideoque

$$2T.\sin.\tfrac{\pi}{n}=\sin.(\tfrac{\pi}{n}-\phi)-\sin.(\tfrac{\pi}{n}-\phi)=0,$$

et $T=0$, ita ut sit $s=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}T=\frac{n}{2}$, hoc est:

$$\sin.\tfrac{1}{2}\phi^2+\sin.(\tfrac{1}{2}\phi+\tfrac{\pi}{n})^2+\sin.(\tfrac{1}{2}\phi+\tfrac{2\pi}{n})^2+$$
$$\ldots.\sin.(\tfrac{1}{2}\phi+\tfrac{(n-1)\pi}{n})^2=\tfrac{n}{2}.$$

§. 7. His tribus Lemmatibus praemissis, ex quibus plures aliae summationes memorabiles deduci possent, quibus autem non immoramur, aggrediemur demonstrationem illorum Theorematum poly-

gonometricorum, quorum supra jam mentionem fecimus quaeque jam in paragrapho secundo enunciata reperiuntur.

Theorema I.

§. 8. *In omni Polygono regulari, si ex uno quolibet angulorum A ad reliquos B, C, D, ... N diagonales agantur, factum ex omnibus diagonalibus et binis lateribus contiguis angulum A comprehendentibus aequatur potestati radii circuli circumscripti uno gradu minori, quam Polygonum habet latera, ductae in numerum laterum, hoc est:*

$$AB \,.\, AC \,.\, AD \;\; \ldots\ldots \;\; AN = n \,.\, AO^{n-1}.$$

Demonstratio.

Ex elementis notum est esse

$$AB = 2\,AO \,.\, \sin.\frac{\pi}{n}.$$

$$AC = 2\,AO \,.\, \sin.\frac{2\pi}{n}$$

$$AD = 2\,AO \,.\, \sin.\frac{3\pi}{n}$$

. . . . .

. . . . .

$$AN = 2\,AO \,.\, \sin.\frac{(n-1)\pi}{n}$$

consequenter erit

$AB \,.\, AC \,.\, AD \ldots\ldots AN = 2^{n-1}\, AO^{n-1} \times P$, denotante $P = \sin.\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\ldots\sin.\frac{(n-1)\pi}{n}$. Hic autem duo casus distinguendi occurunt, prouti fuerit numerus laterum n vel par vel impar.

Casus ubi n par.

Distribuatur productum P in hos factores

$$\sin.\frac{\pi}{n}\,.\,\sin.\frac{2\pi}{n}\,.\,\sin.\frac{3\pi}{n}\ldots\ldots\sin.(\tfrac{1}{2}n-1)\frac{\pi}{n}\,.\,\sin.\tfrac{1}{2}n\,.\,\frac{\pi}{n} = p$$

$$\sin.\frac{(n-1)\pi}{n}\,.\,\sin.\frac{(n-2)\pi}{n}\,.\,\sin.\frac{(n-3)\pi}{n}\ldots\ldots\sin.(\tfrac{1}{2}n+1)\frac{\pi}{n} = q$$

atque ob $\sin. \frac{(n-1)\pi}{n} = \sin. \frac{\pi}{n}$

$$\sin. \frac{(n-2)\pi}{n} = \sin. \frac{2\pi}{n}$$

. . . .

. . . .

$$\sin. \frac{(\frac{1}{2}n+1)\pi}{n} = \sin. (\tfrac{1}{2}n - 1) \frac{\pi}{n},$$

erit $p = q \sin. \frac{1}{2} n \frac{\pi}{n} = q$, ideoque $P = pp$, hoc est:

$$P = \sin. \frac{\pi^2}{n} . \sin. \frac{2\pi^2}{n} . \sin. \frac{3\pi^2}{n} \ldots . \sin. (\tfrac{1}{2}n - 1) \frac{\pi^2}{n}.$$

Quod si autem in Lemmate primo angulus Φ statuatur infinite parvus, ita ut $\sin. n\Phi = n\Phi$ et $\sin. \Phi = \Phi$ erit

$$n\Phi = 2^{n-1} \Phi . \sin. \frac{\pi^2}{n} . \sin. \frac{2\pi^2}{n} \ldots \sin. (\tfrac{1}{2}n - 1) \frac{\pi^2}{n},$$

unde fit $P = \frac{n}{2^{n-1}}$, consequenter

$$AB . AC . AD \ldots . AN = n . AO^{n-1}.$$

Casus ubi n impar.

Distribuatur hic productum P in sequentes factores:

$$\sin. \frac{\pi}{n} . \sin. \frac{2\pi}{n} . \sin. \frac{3\pi}{n} \ldots . \sin. \frac{(n-1)}{2} . \frac{\pi}{n} = r,$$

$$\sin. (n-1) \frac{\pi}{n} . \sin. (n-2) \frac{\pi}{n} . \sin. (n-3) \frac{\pi}{n} \ldots \sin. \frac{(n+1)}{2} . \frac{\pi}{n} = s,$$

atque manifestum est fore $s = r$, hoc est:

$$P = \sin. \frac{\pi^2}{n} . \sin. \frac{2\pi^2}{n} . \sin. \frac{3\pi^2}{n} \ldots . \sin. \frac{(n+1) . \pi^2}{2 . n}.$$

Hinc igitur, cum ex Lemmate fiat $n\Phi = 2^{n-1} \Phi . P$, erit $P = \frac{n}{2^{n-1}}$, ut supra consequenter

$$AB . AC . AD \ldots AN = n . AO^{n-1}.$$

Theorema II.

§. 9. *In omni Polygono regulari summa quadratorum omnium laterum et diagonalium aequatur quadrato radii circuli circumscripti toties sumto quoties unitas in quadrato numeri laterum continetur. Hoc est:*

$$\left.\begin{array}{r} AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2 + \ldots AN^2 \\ + BC^2 + BD^2 + BE^2 + \ldots BN^2 \\ + CD^2 + CE^2 + \ldots CN^2 \\ + DE^2 + \ldots DN^2 \\ + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ + MN^2 \end{array}\right\} = n^2 AO^2.$$

Demonstratio.

Notetur statim esse pro numero laterum n

$AB = 2AO.\sin.\frac{\pi}{n}$	$BC = 2AO.\sin.\frac{\pi}{n}$	$CD = 2AO.\sin.\frac{\pi}{n}$
$AC = 2AO.\sin.\frac{2\pi}{n}$	$BD = 2AO.\sin.\frac{2\pi}{n}$	$CE = 2AO.\sin.\frac{2\pi}{n}$
$AD = 2AO.\sin.\frac{3\pi}{n}$	$BE = 2AO.\sin.\frac{3\pi}{n}$	$CF = 2AO.\sin.\frac{3\pi}{n}$
. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	. . . .
$AN = 2AO.\sin.\frac{(n-1)\pi}{n}$	$BN = 2AO.\sin.\frac{(n-2)\pi}{n}$	$CN = 2AO.\sin.\frac{(n-3)\pi}{n}$

et ita porro. Consequenter habebimus

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + \ldots AN^2 = 4\,AO^2 \times A;$$
$$BC^2 + BD^2 + CE^2 + \ldots BN^2 = 4\,AO^2 \times B;$$
$$CD^2 + CE^2 + CF^2 + \ldots CN^2 = 4\,AO^2 \times C;$$

etc. etc.

denotante

$$A = \sin.\frac{\pi^2}{n} + \sin.\frac{2\pi^2}{n} + \sin.\frac{3\pi^2}{n} + \ldots \sin.\frac{(n-1)\pi^2}{n}$$
$$B = \sin.\frac{\pi^2}{n} + \sin.\frac{2\pi^2}{n} + \sin.\frac{3\pi^2}{n} + \ldots \sin.\frac{(n-2)\pi^2}{n}$$
$$C = \sin.\frac{\pi^2}{n} + \sin.\frac{2\pi^2}{n} + \sin.\frac{3\pi^2}{n} + \ldots \sin.\frac{(n-3)\pi^2}{n}.$$

etc.

Quod si igitur ad has series summandas in subsidium vocemus Lemma 2 (§. 5.) erit

$$A = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sin.\frac{\pi}{n}}{4\sin.\frac{\pi}{n}},$$

$$B = \frac{n-2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sin.\frac{3\pi}{n}}{4\sin.\frac{\pi}{n}},$$

$$C = \frac{n-3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sin.\frac{5\pi}{n}}{4\sin.\frac{\pi}{n}};$$

quorum valorum numerus cum sit $n-1$, eorum summa erit

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2}(1+2+3+4+\ldots(n-1)) + \frac{n-1}{4}$$

$$+ \frac{1}{4\sin.\frac{\pi}{n}}\left[\sin.\frac{\pi}{n} + \sin.\frac{3\pi}{n} + \sin.\frac{5\pi}{n} + \ldots \sin.\frac{(2n-3)\pi}{n}\right].$$

Est vero $\sin.\frac{(2n-m)\pi}{n} = -\sin.\frac{m\pi}{n}$, ergo

$$\sin.\frac{\pi}{n} + \sin.\frac{3\pi}{n} + \sin.\frac{5\pi}{n} + \ldots \sin.\frac{(2n-3)\pi}{n} = \sin.\frac{\pi}{n},$$

unde igitur colligitur fore

$$A + B + C + \ldots\ldots M = \frac{nn}{4};$$

consequenter

$$\left.\begin{array}{r} AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2 + \ldots AN^2 \\ + BC^2 + BD^2 + BE^2 + \ldots BN^2 \\ + CD^2 + CE^2 + \ldots CN^2 \\ + DE^2 + \ldots DN^2 \\ + \ldots\ldots \\ + \ldots \\ + MN^2 \end{array}\right\} = nn\,AO^2.$$

Theorema III.

§. 10. *In omni Polygono regulari, si ex circuli circumscripti puncto quolibet Y ad angulos A, B, C, ... N rectae educantur, summa quadratorum harum rectarum aequatur*

quadrato radii circuli circumscripti per numerum laterum bis sumtum multiplicato; hoc est:

$$YA^2 + YB^2 + YC^2 + \ldots\ldots + YN^2 = 2\,n\,AO^2.$$

Demonstratio.

Sit numerus laterum indefinite $= n$, ponaturque angulus AOY $= \Phi$, eritque

$$YA = 2\,AO \,.\, \sin.\tfrac{1}{2}\Phi$$
$$YB = 2\,AO \,.\, \sin.(\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{\pi}{n}),$$
$$YC = 2\,AO \,.\, \sin.(\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{2\pi}{n}),$$

. . . .

. . . .

$$YN = 2\,AO \,.\, \sin.(\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{(n-1)\pi}{n}),$$

consequenter summa quadratorum

$$4\,AO^2\,[\sin.\tfrac{1}{2}\Phi^2 + \sin.(\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{\pi}{n})^2 + \ldots \sin.(\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{(n-1)\pi}{n})^2].$$

Est vero vi Lemmatis tertii

$$\sin.\tfrac{1}{2}\Phi^2 + \sin.(\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{\pi}{n})^2 + \ldots \sin.(\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{(n-1)\pi}{2})^2 = \tfrac{n}{2}$$

unde sequitur fore

$$YA^2 + YB^2 + YC^2 + \ldots\ldots YN^2 = 2\,n\,AO^2.$$

II.

DE FUNCTIONUM HYPERBOLICARUM ORIGINE,

PROPRIETATIBUS, RELATIONE & USU.

Conventui exhibita die 16. Maj. 1810.

§. 1. Functiones hyperbolicae, de quarum relatione, proprietatibus et usu in Analysi hic nonnulla in medium proferre animus est, sunt lineae illae quas Cel. Lambert primus sub nomine Sinus et Cosinus hyperbolici in Analysin introduxit.

Sit scilicet AM arcus Hyperbolae aequilaterae, cujus vertex in A, centrum in C, ideoque axis CB et CD Asymptota. Ex puncto
Fig. 9. quocunque Q hujus Hyperbolae, demisso in axem perpendiculo QP, vocavit Lambert hanc lineam Sinum hyperbolicum, et lineam CP cosinum hyperbolicum, respectu Sectoris hyperbolici CAQC. Harum linearum functiones quomodo tam a se invicem, quam a functionibus circularibus pendeant, operae pretium videtur accuratius, quam hucusque factum est, examinasse.

§. 2. Quod si igitur ex puncto Q in tangentem communem AE Hyperbolae et circuli, centro C radio CA descripti, demittatur perpendiculum QR, tum vero ex centro C ad puncta Q et R ducantur rectae CQ et CR, quarum illa tangentem AE in T, haec vero quadrantem AB in S intersecat, demisso ex S in CB perpendiculo SV, manifestum est fore CR $=$ CP et SV $=$ TA. Posito enim

$CA = 1$, $AP = x$, erit $PQ = \sqrt{2x + xx} = AR$ et $CR = \sqrt{CA^2 + AR^2} = 1 + x = CP$. Tum vero ob triangula CPQ et CAT, nec non CAR et CVS erit:

$$CP : CA = PQ : AT,$$
$$CR : CS = AR : SV,$$

ideoque ob $CP = CR$; $CA = CS$; $PQ = AR$, erit $AT = SV$ Hinc igitur sequitur fore tag. ACT = sin. ACR, tum vero

$$PQ = \text{tag. } ACR,$$
$$CP = \text{sec. } ACR.$$

§. 3. Quaeramus nunc superficiem Sectoris hyperbolici CAQC per arcum circularem AS, sive per angulnm ACR expressum. Vocetur hic angulus $ACR = \zeta$ et cum sit $AR = PQ = \text{tag.}\,\zeta$ et $CP = CR = \text{sec.}\,\zeta$ erit area trianguli $CPQ = \frac{\sin.\zeta}{2\cos.\zeta^2}$; a qua si auferatur area segmenti hyperbolici APQ, remanet area sectoris CAQC. Posito autem $AP = x$, $PQ = y$, area segmenti est $APQ = \int.y\partial x$; unde cum sit $x = \text{sec.}\,\zeta - 1$ et $y = \text{tag.}\,\zeta$, erit $\int y\partial x = \int \frac{\partial\zeta \sin\zeta^2}{\cos\zeta^3} = \frac{\sin.\zeta}{2\cos.\zeta} - \frac{1}{2}\, l\,.\,\text{tg.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\zeta)$, unde fit area sectoris quaesita: $CAQC = \frac{1}{2}\, l\,.\,\text{tag.}\,(45 + \frac{1}{2}\zeta)$.

§. 4. Ponamus $l\,.\,\text{tg.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\zeta) = \omega$, ita area sectoris sit $CAQC = \frac{1}{2}\omega$, eritque $\text{tag.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\zeta) = e^\omega$, hoc est

$$\frac{1 + \text{tag.}\,\frac{1}{2}\zeta}{1 - \text{tag.}\,\frac{1}{2}\zeta} = e^\omega,$$

unde porro deducitur

$$\text{tag.}\,\tfrac{1}{2}\zeta = \frac{e^\omega - 1}{e^\omega + 1},$$

sicque habebimus

$$\text{tag.}\,\zeta = \frac{\text{tg.}\,\frac{1}{2}\zeta + \text{tg.}\,\frac{1}{2}\zeta}{1 - \text{tg.}\,\frac{1}{2}\zeta^2} = \frac{e^{2\omega} - 1}{2e^\omega},$$

sive $\text{tag.}\,\zeta = \frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2}$, hincque

$$\text{sec.}\,\zeta = \frac{e^\omega + e^{-\omega}}{2}$$

Cum igitur supra §. 2. invenerimus

$$PQ = \text{tag.}\, \zeta \text{ et } CP = \text{sec.}\, \zeta,$$

evidens est fore

$$PQ = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2},$$

$$CP = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2}.$$

Quod si igitur cum Lamberto vocemus

PQ Sinum hyperb. CAQC,
CP Cosinum hyperb. CAQC,
AT Tangentem hyp. CAQC,

erit

$$\text{sin. hyp. } \omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2}$$

$$\text{Cos. hyp. } \omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2}$$

$$\text{tag. hyp. } \omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$$

$$\text{ob } AT = \frac{CA \,.\, PQ}{CP} = \frac{PQ}{CP}.$$

§. 5. Nunc autem commoditatis gratia sinum, cosinum, et tangentem Sectoris hyperbolici respective litteris germanicis majusculis $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{T}$, designabo, ita ut sit

$$PQ = \mathfrak{S} \,.\, \omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2}$$

$$CP = \mathfrak{C} \,.\, \omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2}$$

$$AT = \mathfrak{T} \,.\, \omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}} = \frac{\mathfrak{S} \;\omega}{\mathfrak{C} \,.\, \omega},$$

denotante ω duplum areae sectoris hyperbolici CAQ.

§. 6. Hinc jam statim fluunt sequentes relationes:

1°, $\mathfrak{C} \,.\, \omega + \mathfrak{S} \,.\, \omega = e^{\omega}$,
2°, $\mathfrak{C} \,.\, \omega - \mathfrak{S} \,.\, \omega = e^{-\omega}$,
3°, $2\mathfrak{S} \,.\, \omega \times \mathfrak{C} \,.\, \omega = \mathfrak{S} \,.\, 2\,\omega$,

hincque porro fit

4°, $(\mathfrak{C} \,.\, \omega)^2 - (\mathfrak{S} \,.\, \omega)^2 = 1$,
5°, $(\mathfrak{C} \,.\, \omega)^2 + (\mathfrak{S} \,.\, \omega)^2 = \mathfrak{C} \,.\, 2\,\omega$,

$$6^\circ,\ 2(\mathfrak{S}.\omega)^2 = \mathfrak{C}.2\omega - 1,$$
$$7^\circ,\ 2(\mathfrak{C}.\omega)^2 = \mathfrak{C}.2\omega + 1,$$

ex binis autem postremis sequitur fore

$$\mathfrak{C}.2\omega = 1 + 2(\mathfrak{S}.\omega)^2,$$
$$\mathfrak{C}.2\omega = 2(\mathfrak{C}.\omega)^2 - 1,$$
$$\mathfrak{S}.\omega = \sqrt{\frac{\mathfrak{C}.2\omega - 1}{2}};$$
$$\mathfrak{C}.\omega = \sqrt{\frac{\mathfrak{C}.2\omega + 1}{2}},$$

Denique quoque patet fore

$$\mathfrak{S}(-\omega) = -\mathfrak{S}.\omega$$
$$\mathfrak{C}(-\omega) = +\mathfrak{C}.\omega.$$

§. 7. Quod si ω fuerit valde parvum erit per series

$$\mathfrak{S}.\omega = \omega + \frac{\omega 3}{1.2.3} + \frac{\omega 5}{1 \ldots 5} + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C}.\omega = 1 + \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^4}{1 \ldots 4} + \text{etc.}$$

Quoniam autem valor ω usque ad $\zeta = 55^\circ$ semper minor est unitate sufficiet sex priores harum serierum terminos sumere, si $\mathfrak{S}.\omega$ et $\mathfrak{C}.\omega$ usque ad septem figuras decimales determinare velimus ex dato ω.

§. 8. Praeterea notari meretur fore per sinus et cosinus circulares

$$\frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2} = \frac{\sin.(\omega\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$$
$$\frac{e^\omega + e^{-\omega}}{2} = \cos.(\omega\sqrt{-1})$$

consequenter

$$\mathfrak{S}.\omega = \frac{\sin.(\omega\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$$
$$\mathfrak{C}.\omega = \cos.(\omega\sqrt{-1}).$$

§. 9. Posito $\mathfrak{S}.\omega = x$ erit ex §. 6[to] relatione 4[ta] $\mathfrak{C}.\omega = \sqrt{1 + xx}$, ideoque

$$e^{\omega} = x + \sqrt{1 + xx}$$

ex relatione 1ma, hincque fit

$$\omega = \log.\ (x + \sqrt{1 + xx})$$

unde differentiando colligitur

$$\partial\omega = \frac{\partial x}{\sqrt{1+xx}} \text{ et } \omega = \int \frac{\partial x}{\sqrt{1+xx}}.$$

Facile quoque intelligitur fore ex 1 et 2

$$\omega = \log.\ (\mathfrak{S}.\omega + \mathfrak{C}.\omega)$$
$$-\omega = \log.\ (\mathfrak{C}.\omega - \mathfrak{S}.\omega)$$

§. 10. Quod si expressionum §. 5. differentialia sumantur prodibit

$$\partial.\mathfrak{S}.\omega = \partial.\omega\left(\frac{e^{\omega}+e^{-\omega}}{2}\right) = \partial\omega.\mathfrak{C}.\omega,$$
$$\partial.\mathfrak{C}.\omega = \partial.\omega\left(\frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{2}\right) = \partial\omega.\mathfrak{S}.\omega,$$

hincque vicissim erit

$$\int\partial\omega\,\mathfrak{C}.\omega = \mathfrak{S}.\omega,$$
$$\int\partial\omega\,\mathfrak{S}.\omega = \mathfrak{C}.\omega.$$

Eodem modo, cum fit

$$\mathfrak{S}.n\omega = \frac{e^{n\omega} - e^{-n\omega}}{2},$$
$$\mathfrak{C}.n\omega = \frac{e^{n\omega} + e^{-n\omega}}{2},$$

erit generalius

$$\partial.\mathfrak{S}.n\omega = n\partial\omega.\mathfrak{C}.n\omega,$$
$$\partial.\mathfrak{C}.n\omega = n\partial\omega.\mathfrak{S}.n\omega,$$

et vicissim

$$\int\partial\omega\,\mathfrak{C}.n\omega = \frac{1}{n}\,\mathfrak{S}.n\omega,$$
$$\int\partial\omega\,\mathfrak{S}.n\omega = \frac{1}{n}\,\mathfrak{C}.n\omega,$$

tum vero quoque erit

$$\partial.\frac{\mathfrak{S}.n\omega}{\mathfrak{C}.n\omega} = n\partial\omega\,\frac{[(\mathfrak{C}.n\omega)^2-(\mathfrak{S}.n\omega)^2]}{(\mathfrak{C}.n\omega)^2}$$

hoc est

$$\partial \cdot \mathfrak{T} \cdot n\omega = \frac{n\partial\omega}{(\mathfrak{C} \cdot n\omega)^2};$$

eodemque modoe rperitur

$$\partial \cdot \frac{\mathfrak{C} \cdot n\omega}{\mathfrak{S} \cdot n\omega} = n\partial\omega \frac{[(\mathfrak{S} \cdot n\omega)^2 - (\mathfrak{C} \cdot n\omega)^2]}{(\mathfrak{S} \cdot n\omega)^2}$$

sive

$$\partial \cdot \frac{\mathfrak{C} \cdot n\omega}{\mathfrak{S} \cdot n\omega} = \frac{-n\partial\omega}{(\mathfrak{S} \cdot n\omega)^2},$$

unde vicissim concluditur fore

$$\int \frac{\partial\omega}{(\mathfrak{C} \cdot n\omega)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathfrak{S} \cdot n\omega}{\mathfrak{C} \cdot n\omega}$$

$$\int \frac{\partial\omega}{(\mathfrak{S} \cdot n\omega)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathfrak{C} \cdot n\omega}{\mathfrak{S} \cdot n\omega}$$

§. 11. Ex formulis §. 5^{ti}. porro facile derivantur sequentes:

$$\mathfrak{S} \cdot a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}; \quad \mathfrak{C} \cdot a = \frac{e^a + e^{-a}}{2};$$

$$\mathfrak{S} \cdot b = \frac{e^b - e^{-b}}{2}; \quad \mathfrak{C} \cdot b = \frac{e^b + e^{-b}}{2},$$

unde deducuntur sequentes:

$$2 \ \mathfrak{S} \cdot a \times \mathfrak{C} \cdot b = \frac{e^{a+b} - e^{b-a} + e^{a-b} - e^{-a-b}}{2},$$

$$2 \ \mathfrak{C} \cdot a \times \mathfrak{S} \cdot b = \frac{e^{a+b} + e^{b-a} - e^{a-b} - e^{-a-b}}{2},$$

$$2 \ \mathfrak{C} \cdot a \times \mathfrak{C} \cdot b = \frac{e^{a+b} + e^{b-a} + e^{a-b} + e^{-a-b}}{2},$$

$$2 \ \mathfrak{S} \cdot a \times \mathfrak{S} \cdot b = \frac{e^{a+b} - e^{b-a} - e^{a-b} - e^{-a-b}}{2},$$

sive restitutis loco potestatibus ipsius e Sinibus et Cosinibus hyperbolicis:

$$2 \cdot \mathfrak{S} \cdot a \cdot \mathfrak{C} \cdot b = \mathfrak{S} \cdot (a + b) + \mathfrak{S} \, (a - b)$$

$$2 \cdot \mathfrak{C} \cdot a \cdot \mathfrak{S} \cdot b = \mathfrak{S} \cdot (a + b) - \mathfrak{S} \, (a - b)$$

$$2 \ \mathfrak{C} \cdot a \cdot \mathfrak{C} \cdot b = \mathfrak{C} \cdot (a + b) + \mathfrak{C} \cdot (a - b)$$

$$2 \ \mathfrak{S} \cdot a \cdot \mathfrak{S} \cdot b = \mathfrak{C} \cdot (a + b) - \mathfrak{C} \cdot (a - b).$$

§. 12. Hinc porro deducuntur sequentes expressiones:

$$\mathfrak{S} \cdot (a + b) = \mathfrak{S} \cdot a \cdot \mathfrak{C} \cdot b + \mathfrak{C} \cdot a \cdot \mathfrak{S} \cdot b,$$

$$\mathfrak{S} \cdot (a - b) = \mathfrak{S} \cdot a \cdot \mathfrak{C} \cdot b - \mathfrak{C} \cdot a \cdot \mathfrak{S} \cdot b,$$

$$\mathfrak{C}.(a+b)=\mathfrak{C}.a.\mathfrak{C}.b+\mathfrak{S}.a.\mathfrak{S}.b,$$
$$\mathfrak{C}.(a-b)=\mathfrak{C}.a.\mathfrak{C}.b-\mathfrak{S}.a.\mathfrak{S}.b.$$

§. 13. Eaedem expressiones §. 11. inventae praebent has:

$$\mathfrak{S}.a+\mathfrak{S}.b=2\,\mathfrak{S}.\frac{a+b}{2}.\mathfrak{C}.\frac{a-b}{2},$$
$$\mathfrak{S}.a-\mathfrak{S}.b=2\,\mathfrak{C}.\frac{a+b}{2}.\mathfrak{S}.\frac{a-b}{2},$$
$$\mathfrak{C}.a+\mathfrak{C}.b=2\,\mathfrak{C}.\frac{a+b}{2}.\mathfrak{C}.\frac{a-b}{2},$$
$$\mathfrak{C}.a-\mathfrak{C}.b=2\,\mathfrak{S}.\frac{a+b}{2}.\mathfrak{S}.\frac{a-b}{2}.$$
$$\frac{\mathfrak{S}.a+\mathfrak{S}.b}{\mathfrak{C}.a+\mathfrak{C}.b}=\mathfrak{T}.\frac{a+b}{2},$$
$$\frac{\mathfrak{S}.a+\mathfrak{S}.b}{\mathfrak{C}.a-\mathfrak{C}.b}=\mathfrak{Cot}.\frac{a-b}{2},$$
$$\frac{\mathfrak{S}.a-\mathfrak{S}.b}{\mathfrak{C}.a+\mathfrak{C}.b}=\mathfrak{T}.\frac{a-b}{2},$$
$$\frac{\mathfrak{S}.a-\mathfrak{S}.b}{\mathfrak{C}.a-\mathfrak{C}.b}=\mathfrak{Cot}.\frac{a+b}{2},$$
$$\frac{\mathfrak{S}.a+\mathfrak{S}.b}{\mathfrak{C}.a+\mathfrak{C}.b}=\frac{\mathfrak{C}.a-\mathfrak{C}.b}{\mathfrak{S}.a-\mathfrak{S}.b},$$
$$\frac{\mathfrak{S}.a+\mathfrak{S}.b}{\mathfrak{C}.a-\mathfrak{C}.b}=\frac{\mathfrak{C}.a+\mathfrak{C}.b}{\mathfrak{S}.a-\mathfrak{S}.b}.$$

§. 14. Ex formulis autem §. 12. inventis colligitur fore

$$\mathfrak{T}.(a+b)=\frac{\mathfrak{T}.a+\mathfrak{T}.b}{1+\mathfrak{T}.a.\mathfrak{T}.b},$$
$$\mathfrak{T}.(a-b)=\frac{\mathfrak{T}.a-\mathfrak{T}.b}{1-\mathfrak{T}.a.\mathfrak{T}.b},$$

§. 15. Supra §. 10. jam observavimus esse

$$\mathfrak{C}.n\omega=\tfrac{1}{2}e^{n\omega}+\tfrac{1}{2}e^{-n\omega},$$
$$\mathfrak{S}.n\omega=\tfrac{1}{2}e^{n\omega}-\tfrac{1}{2}e^{-n\omega},$$

unde, quoniam

$$e^{n\omega}=(e^{\omega})^{n},$$
$$e^{-n\omega}=(e^{-\omega})^{n},$$

prodibunt sequentes expressiones:

$$\mathfrak{C}.n\omega = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}.\omega + \mathfrak{S}.\omega)^n + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}.\omega - \mathfrak{S}.\omega)^n,$$
$$\mathfrak{S}.n\omega = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}.\omega + \mathfrak{S}.\omega)^n - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}.\omega - \mathfrak{S}.\omega)^n,$$

ex quibus porro sequitur fore

$$(\mathfrak{C}.\omega + \mathfrak{S}.\omega)^n = \mathfrak{C}.n\omega + \mathfrak{S}.n\omega$$
$$(\mathfrak{C}.\omega - \mathfrak{S}.\omega)^n = \mathfrak{C}.n\omega - \mathfrak{S}.n\omega$$

§. 16. Quod si igitur ponatur $\mathfrak{S}.\omega = x$ et $\mathfrak{C}.\omega = y$, erit

$$\mathfrak{C}.n\omega = \tfrac{1}{2}(y + x)^n + \tfrac{1}{2}(y - x)^n,$$
$$\mathfrak{S}.n\omega = \tfrac{1}{2}(y + x)^n - \tfrac{1}{2}(y - x)^n.$$

Hinc autem Sinus et Cosinus hyperbolici multiplorum ipsius ω sequentes oriuntur:

$\mathfrak{C}.0\omega = 1$

$\mathfrak{C}.1\omega = y$ ubi notandum esse

$\mathfrak{C}.2\omega = yy + xx$ $xx = yy - 1$

$\mathfrak{C}.3\omega = y^3 + 3xxy$

$\mathfrak{C}.4\omega = y^4 + 6yyxx + x^4$

$\mathfrak{C}.5\omega = y^5 + 10y^3xx + 5yx^4$

etc. etc.

$\mathfrak{S}.0\omega = 0$

$\mathfrak{S}.1\omega = x$

$\mathfrak{S}.2\omega = 2yx$

$\mathfrak{S}.3\omega = 3yyx + x^3$

$\mathfrak{S}.4\omega = 4y^3x + 4yx^3$

$\mathfrak{S}.5\omega = 5y^4x + 10y^2x^3 + x^5$. etc. etc.

§. 17. *Eulerus* olim invenit hanc fractionem continuam

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}} = n + \cfrac{1}{3n + \cfrac{1}{5n + \cfrac{1}{7n + \cfrac{1}{9n + \text{etc.}}}}}$$

Hinc si loco $\frac{1}{n}$ scribatur ω, erit $n = \frac{1}{\omega}$, ideoque

$$\frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{e^{\omega} - e^{-\omega}} = \frac{1}{\omega} + \cfrac{1}{\frac{3}{\omega} + \cfrac{1}{\frac{5}{\omega} + \cfrac{1}{\frac{7}{\omega} + \cfrac{1}{\frac{9}{\omega} + \text{etc.}}}}}$$

sive $$\frac{\mathfrak{C}.\omega}{\mathfrak{S}.\omega} = \frac{1}{\omega} + \cfrac{\omega}{3 + \cfrac{\omega}{5 + \cfrac{\omega}{7 + \cfrac{\omega}{9 + \text{etc.}}}}}$$

hincque invertendo

$$\frac{\mathfrak{S}.\omega}{\mathfrak{C}.\omega} = \mathfrak{T}.\omega = \cfrac{1}{\frac{1}{\omega} + \cfrac{\omega}{3 + \cfrac{\omega}{5 + \cfrac{\omega}{7 + \cfrac{\omega}{9 + \text{etc.}}}}}}$$

sive $$\mathfrak{T}.\omega = \cfrac{1}{\frac{1}{\omega} + \cfrac{1}{\frac{3}{\omega} + \cfrac{1}{\frac{5}{\omega} + \cfrac{1}{\frac{7}{\omega} + \text{etc.}}}}}$$

sive etiam

$$\mathfrak{T}.\omega = \cfrac{\omega}{1 + \cfrac{\omega^2}{3 + \cfrac{\omega^2}{5 + \cfrac{\omega^2}{7 + \text{etc.}}}}}$$

§. 18. Si fuerit $\mathfrak{T}.\omega = \frac{2fg}{ff+gg}$, erit $\mathfrak{S}.\omega = \frac{2fg}{ff-gg}$ et $\mathfrak{C}.\omega = \frac{ff+gg}{ff-gg}$, hinc $\mathfrak{C}.\omega + \mathfrak{S}.\omega = \frac{f+g}{f-g}$ et $\mathfrak{C}.\omega - \mathfrak{S}.\omega = \frac{f-g}{f+g}$,

unde ex §. 15 colligitur

$$\mathfrak{C}\,.\,n\omega = \frac{(f+g)^{2n} + (f-g)^{2n}}{2\,(ff-gg)^n},$$

$$\mathfrak{S}\,.\,n\omega = \frac{(f+g)^{2n} - (f-g)^{2n}}{2\,(ff-gg)^n},$$

existente secundum §. 9

$$\omega = \log.\ \frac{f+g}{f-g}.$$

III.

SUMMATIO DUARUM SERIERUM.

Conventui exhibita die 13. Aug 1817.

§. 1. In dissertatione, cui titulus est: *De serie maxime memorabili, qua potestas binomialis quaecunque exprimi potest*[1], illustris quondam Eulerus in seriem inquisiverat potestatem $(1+x)^n$ exhibentem, quae scilicet abrumperetur pro exponente n quocunque integro tam positivo quam negativo. Invenerat nimirum memoratae dissertationis auctor, posito $zz = \frac{xx}{1+x}$ fore

$$(1+x)^n = \begin{cases} 1 + \frac{n(n-1)}{1.2} z^2 + \frac{(n+1)\ldots(n-2)}{1\ldots 4} z^4 + \frac{(n+2)\ldots(n-3)}{1\ldots 6} z^6 \text{ etc.} \\ nx + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} xz^2 + \frac{(n+2)\ldots\ldots(n-2)}{1\ldots 5} xz^4 \text{ etc.} \end{cases}$$

sive $(1+x)^n = s + t\frac{x}{z}$, existente

$$s = 1 + \frac{n(n-1)}{1.2} z^2 + \frac{(n+1)\ldots(n-2)}{1\ldots 4} z^4 + \frac{(n+2)\ldots(n-3)}{1\ldots 6.} z^6 + \text{etc.}$$

$$t = \frac{n}{1} z + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} z^3 + \frac{(n+2)\ldots\ldots(n-2)}{1\ldots 5} z^5 + \text{etc.}$$

§. 2. Harum porro serierum s et t summam, utramque seorsim, investigare docuit Eulerus, eamque ita invenit expressam:

$$s = \frac{(1+x)^n + (1+x)^{1-n}}{2+x}; \quad (2)$$

$$t = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}+n} - (1+x)^{\frac{1}{2}-n}}{2+x}.$$

---

(1) V. *Mémoires de l'Acad. Impér. des Sciences de S.t. Pétersbourg, Tome IV. pag.* 75.

(2) *Mém. T. IV. pag.* 87. Loco quidem citato exponens postremi membri numeratoris legitur $-n$; verum hoc errori typographico tribuendum est.

Haec summatio summo nostro Geometrae tanti momenti visa est, ut eam adeo tribus variis modis instituerit, quorum bini priores ex consideratione aequationum differentialium primi et secundi gradus, per evolutionem potestatis binomialis genitarum, erant deducti, de quibus autem non tam facile perspicitur, quomodo cum seriebus illis cohaereant. Cum igitur in methodum incidissem hanc summationem immediate ex sola progressionis lege, in utraque serie conspicua, derivandi, eam heic breviter exponere eo minus dubito, quod insuper ansam praebuit ad inveniendum integrale completum aequationis differentialis ad difficiliores et rarius occurrentes referendae.

§. 3. Methodus autem a me adhibita eo nititur fundamento, ut, quoniam in seriebus, quarum summatio proponitur, lex progressionis est simplex et manifesta, tam ex serie s quam ex serie t ope differentiationis duae aliae deriventur duplici modo ad identitatem revocatae. Ita ex priore serie:

$$s = 1 + \frac{n(n-1)}{1.2} z^2 + \frac{(n+1)\ldots(n-2)}{1\ldots4} z^4 + \frac{(n+2)\ldots(n-3)}{1\ldots6} z^6 + \text{etc.}$$

facile deducuntur binae sequentes:

$$\text{I. } \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{n(n-1)}{1} z + \frac{(n+1)\ldots(n-2)}{1.2.3} z^3 + \frac{(n+2)\ldots(n-3)}{1\ldots5} z^5 + \text{etc.}$$

$$\text{II. } \frac{\partial . sz^{2n}}{2z^{2n-1}\partial z} = n + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2} z^2 + \frac{(n+2)\ldots(n-2)}{1\ldots4} z^4 + \text{etc.}$$

Ex altera autem serie:

$$t = nz + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} z^3 + \frac{(n+2)\ldots\ldots(n-2)}{1\ldots\ldots5} z^5 + \text{etc.}$$

binae sequentes derivantur:

$$\text{III. } \frac{\partial t}{\partial z} = n + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2} z^2 + \frac{(n+2)\ldots\ldots(n-2)}{1\ldots4} z^4 + \text{etc.}$$

$$\text{IV.} - \frac{z^{2n}\partial . tz^{1-2n}}{2\partial z} = \frac{n(n-1)}{1} z + \frac{(n+1)\ldots(n-2)}{1.2.3} z^3 + \frac{(n+2)\ldots(n-3)}{1\ldots5} z^5 + \text{etc.}$$

§. 4. Quod si jam has quatuor novas series inter se comparemus, statim perspicimus primam cum quarta et tertiam cum secunda penitus convenire. Habebimus igitur has duas aequationes:

$$\frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{z^{2n}\partial . tz^{1-2n}}{2\partial z};$$
$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial . sz^{2n}}{2z^{2n-1}\partial z};$$

quae, facta evolutione, abeunt in sequentes:

$$2\partial s = (2n - 1)t\partial z - z\partial t;$$
$$2\partial t = 2ns\partial z + z\partial s;$$

non diversae ab illis, quas Eulerus ex evolutione potestatis $(1+x)^n$ secundum conditiones problematis sibi propositi, instituta derivavit. Quomodo autem hae aequationes cum seriebus summandis cohaereant nunc cuique in oculos incurrit.

§. 5. Quo nunc ex his aequationibus valores quaesitos s et t per integrationem investigemus (quod ab Eulero in prima ejus solutione ope multiplicatoris idonei factum est), statuamus $S = tv$, et nostrae binae aequationes induent has formas:

$$2t\partial v + 2v\partial t = (2n - 1)t\partial z - z\partial t$$
$$2\partial t = zt\partial v + zv\partial t + 2ntv\partial z$$

ex quarum utraque deducitur

$$\frac{\partial t}{t} = \frac{(2n-1)\partial z - 2\partial v}{2v + z};$$
$$\frac{\partial t}{t} = \frac{2nv\partial z + z\partial v}{2 - zv};$$

unde sublatis denominatoribus, nanciscimur hanc aequationem:

$$\partial z[(2n - 1)(2 - zv) - 2nv(2v + z)] = (zz + 4)\partial v$$

cujus, utpote ad genus Riccatianarum referendae, resolutio vix sperare liceret, nisi integralia particularia assignare valeremus.

§. 6. Tales autem valores particulares facile obtinebimus, si consideremus duos casus $n = \infty$ et $n = 0$. Pro priore casu nostra aequatio differentialis fiet

$$\partial z[2n(2 - zv) - 2nv(2v + z)] = 0$$

quae, facta reductione, abit in

$$1 - zv - vv = 0.$$

Ex hac igitur aequatione relatio inter z et v definietur, quae, si etiam alteri casui, quo $n = 0$, satisfaceret, revera foret integrale particulare aequationis nostrae differentialis propositae. Cum igitur, posito $n = 0$, aequatio illa evadat

$$\partial z(zv - 2) = \partial v(zz + 4)$$

si hic loco z substituamus valorem ex aequatione $1 - zv - vv = 0$ petitum $z = \frac{1 - vv}{v}$, ob $\partial z = -\frac{\partial v(1 + vv)}{vv}$, tum vero ob $zz + 4 = \frac{(1 + vv)^2}{vv}$, nec non $zv - 2 = -(1 + vv)$, prodit aequatio

$$\frac{\partial v(1 + vv)^2}{vv} = \frac{\partial v(1 + vv)^2}{vv}$$

quae cum sit identica, certum est signum, aequationem $1 - zv - vv = 0$ revera continere integrale particulare nostrae aequationis differentialis §. 5. exhibitae.

§. 7. Ante autem quam integrationem hujus aequationis suscipiamus, meminisse oportet quemadmodum ex integralibus particularibus integralia completa formari queant. Hunc in finem statuamus esse P et Q valores satisfacientes pro s et t, atque evidens est etiam valores $s = MP$ et $t = MQ$ fore satisfacturos. Simili modo, si p et q fuerint alii valores satisfacientes pro s et t, tum etiam eorum multipla $s = mp$ et $t = mq$ satisfacient. Quin etiam valores ex his compositi pariter satisfaciant necesse est, ita ut quoque simus habituri valores

$$s = MP + mp;$$
$$t = MQ + mq;$$

qui igitur, ob binas constantes arbitrarias M et m, pro integrali completo sunt habendi.

§. 8. His praemissis statuamus, commodioris calculi gratia, $z = 2y$, atque ex aequatione $1 - 2yv - vv = 0$ pro v nascuntur duo valores:

$$v = -y + \sqrt{1 + yy};$$
$$u = -y - \sqrt{1 + yy};$$

quem utrumque seorsim tractabimus. Primo igitur sit

$$v = -y + \sqrt{1 + yy}$$

cujus differentiale

$$\partial v = \frac{\partial y (y - \sqrt{1 + yy})}{\sqrt{1 + yy}}$$

si in priori expressione, supra §. 5. pro $\frac{\partial t}{t}$ inventa, substituatur, fiet

$$\frac{\partial t}{t} = \frac{2n\partial y}{\sqrt{1 + yy}} - \frac{y\partial y}{1 + yy} :$$

Ex valore autem pro ∂v modo tradito sequitur fore

$$\frac{\partial y}{\sqrt{1 + yy}} = \frac{\partial v}{y - \sqrt{1 + yy}} = -\frac{\partial v}{v},$$

ita ut habeamus

$$\frac{\partial t}{t} = -\frac{2n\partial v}{v} - \frac{y\partial y}{1 + yy},$$

unde sumtis integralibus emergit

$$lt = -2nlv - l\sqrt{1 + yy} + lM.$$

Erit igitur si ad numeros resurgamus

$$t = \frac{Mv^{-2n}}{\sqrt{1 + yy}} \text{ et}$$

$$s = tv = \frac{Mv^{1-2n}}{\sqrt{1 + yy}}.$$

§. 9. Simili nunc modo etiam tractanda est altera radix u aequationis $1 - 2yv - vv = 0$. Calculo autem supersedere possumus, scribendo tantum u loco v et m loco M, quo facto erit

$$t = \frac{mu^{-2n}}{\sqrt{1 + yy}};$$

$$s = \frac{mu^{1-2n}}{\sqrt{1 + yy}}.$$

Cum autem sit $uv = -1$, ideoque $u = -v^{-1}$ valores isti transmutabuntur in sequentes:

$$t = \frac{mv^{+2n}}{\sqrt{1 + yy}};$$

$$s = -\frac{mv^{2n-1}}{\sqrt{1 + yy}}.$$

Evidens enim est potestatem parem v^{2n} signo positivo fore affectam, potestatem vero imparem v^{2n-1} signo negativo.

§. 10. Quod si nunc ex his binis integralibus particularibus integrale completum secundum principium §. 7. expositum componamus, habebimus

$$s = \frac{Mv^{-2n} - mv^{+2n}}{\sqrt{1+yy}};$$
$$t = \frac{Mv^{-2n} + mv^{+2n}}{\sqrt{1+yy}};$$

quae formulae si accommodentur ad casum $z = 0$, pro quo fit $y = 0$ et $v = 1$, tum vero $s = 1$ et $t = 0$, sequitur hinc fieri debere $M - m = 1$ et $M + m = 0$, unde concluditur fore $M = \frac{1}{2}$ et $m = -\frac{1}{2}$, ideoque

$$s = \frac{v^{1-2n} + v^{2n-1}}{2\sqrt{1+yy}};$$
$$t = \frac{v^{-2n} - v^{+2n}}{2\sqrt{1+yy}};$$

ita ut summae serierum propositarum jam penitus sint determinatae.

§. 11. Tantum superest ut loco v et y quantitatem x restituamus. Hunc in finem ex valore $y = \frac{1}{2}z$ (§. 8.) quaeramus primo denominatorem $2\sqrt{1+yy} = \sqrt{4+zz}$, qui ergo, ob $zz = \frac{xx}{1+x}$ (§. 1.), erit

$$2\sqrt{1+yy} = \frac{2+x}{\sqrt{1+x}}.$$

Tum vero ob $v = -y + \sqrt{1+yy}$ (§. 8.) erit

$$v = -\tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\sqrt{4+zz},$$
$$v^2 = -vz + 1 = \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{2}z\sqrt{4+zz} + 1$$

ita ut, ob $x = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z\sqrt{4+zz}$, sit $v^2 = 1+x$ et $v = \sqrt{1+x}$, quibus valoribus substitutis summae quaesitae serierum propositarum ita se praebent expressae:

$$s = \frac{(1+x)^n + (1+x)^{1-n}}{2+x};$$

$$t = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}-n} - (1+x)^{\frac{1}{2}+n}}{2+x}.$$

§. 12. Haec quidem postrema summatio seriei t ab Euleriana ratione signorum discrepare videtur. Interim tamen, quod et nostra rite sibi constet, statim inde' patebit, quod fiat

$$s + t\,\frac{x}{z} = (1+x)^n,$$

ut in fine §^{i}. 1. postulabatur. Ex conditione enim $zz = \frac{xx}{1+x}$ sequitur fore tam $\frac{x}{z} = +(1+x)^{\frac{1}{2}}$ quam $\frac{x}{z} = -(1+x)^{\frac{1}{2}}$. Ex posteriore vero valore nanciscimur

$$t\,\frac{x}{z} = \frac{(1+x)^{1+n} - (1+x)^{1-n}}{2},$$

quod, cum valore

$$s = \frac{(1+x)^n + (1+x)^{1-n}}{2+x}$$

conjunctum, dat

$$s + t\,\frac{x}{z} = \frac{(1+x)^n + (1+x)^{1+n}}{2+x} = (1+x)^n$$

uti requiritur.

§. 13. Ceterum cum sit ex §. 1.

$$(1+x)^n = s + t\frac{x}{z} = s - t(1+x)^{\frac{1}{2}},$$

posito, ut modo fecimus, $\frac{x}{z} = -(1+x)^{\frac{1}{2}}$ (§. 12.) quoque habebimus

$$(1+x)^{-n} = s + t(1+x)^{-\frac{1}{2}},$$

a qua potestate si prior $(1+x)^{+n}$ subtrahatur, remanebit

$$(1+x)^{-n} - (1+x)^{+n} = t(1+x)^{-\frac{1}{2}} + t(1+x)^{+\frac{1}{2}}$$

unde statim sequitur fore

$$t = \frac{(1+x)^{-n} - (1+x)^{+n}}{\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}}$$

sive ductis numeratore ac denominatore in $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, erit

$$t = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}-n} - (1+x)^{\frac{1}{2}+n}}{2+x}$$

unde porro, ob $s = (1+x)^{-n} - t(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, nanciscimur

$$s = (1+x)^{-n} - \frac{(1+x)^{-n} + (1+x)^{+n}}{(1+x)+1}$$

quibus denique ad eundem denominatorem revocatis emergit

$$s = \frac{(1+x)^{n} + (1+x)^{1-n}}{2+x}$$

prorsus ut supra. Haecque solutio utique est omnium facillima, ita ut non opus fuisset ad aequationes differentiales confugere, nisi methodus ipsa has aequationes tractandi, et exemplum magistri, suasissent rem etiam hac via aggredi.

IV.

DE VALORE FORMULARUM

$\int x^n \partial x e^{-\alpha x} \sin \beta x$ et $\int x^n \partial x e^{-\alpha x} \cos \beta x$

SI INTEGRALIA AB $x = 0$ AD $x = 1$ USQUE EXTENDANTUR.

Conventui exhibita die 22. Aug. 1810.

§. 1. Haec ambo integralia jam pridem a summo quondam Geometra, nostro L. Eulero, et quidem pro iisdem integrationis terminis, determinata fuere: reperiuntur ea in Tomo IV, posthumo, Institutionum Calculi integralis, pag. 342. Pro iis investigandis hujus integrationis auctor Imaginariis usus est, ideo inquit, quod methodi minus insolitae calculos non parum molestos requirunt. Interim tamen cum ipse non ita pridem similes formulas tractassem, eorumque integralia, intra praescriptos terminos contenta, investigassem (1), postmodum methodum in hoc negotio adhibitam cum omni successu, et sine calculis admodum prolixis, etiam ad formulas binas in titulo expositas applicare mihi licuit. Placuerat quidem mihi mira simplicitas solutionis Eulerianae, et persuasissimum mihi habeo eam nemini lectorum displicuisse; nihilo tamen minus et meam heic exponere minime dubito. Neminem enim poenitebit problema qualecunque jam solutum iterum aliter solvisse, cum id variis modis praestitisse scientiae intersit. En igitur meam solutionem ejusdem problematis sine subsidio imaginariorum peractam.

---

(1) Conf. Dissertatio, cui titulus est: *Demonstratio theorematum quorundam calculum integralem spectantium.* Tomo IV. *Mémoires de l'Académie etc.* inserta.

§. 2. Consideretur haec formula

$$V = x^n e^{-\alpha x} (A \sin \beta x + B \cos \beta x)$$

quae scilicet ita est comparata ut evanescat tam casu $x = 0$ quam posito $x = \infty$. De priore valore id per se est manifestum; quod alterum attinet, ponatur $x = \infty + 1$ eritque

$$x^n = \infty^n + \frac{n}{1} \infty^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \infty^{n-2} + \text{etc.}$$

$$e^{-\alpha\infty} = 1 - \frac{\alpha\infty}{1} + \frac{\alpha^2\infty^2}{1.2} - \frac{\alpha^3\infty^3}{1.2.3} \cdots \frac{\alpha^\infty . \infty^\infty}{1 \ldots \infty}$$

ergo $x^n . e^{-\alpha x} = \frac{(\infty+1)^n \times 1 \ldots\ldots \infty}{\alpha^\infty . \infty^\infty}$ hoc est $V = 0$ posito $x = \infty$. Hinc tamen excipiendus est casus quo $n = 0$, quem igitur infra §. 7. seorsim tractemus.

§. 3. Differentiemus jam formulam illam V, atque habebimus

$$\partial V = \left\{ \begin{array}{l} n x^{n-1} \partial x e^{-\alpha x} (A \sin \beta x + B \cos \beta x) \\ - (A\alpha + B\beta) x^n e^{-\alpha x} \partial x \sin \beta x \\ - (B\alpha - A\beta) x^n e^{-\alpha x} \partial x \cos \beta x \end{array} \right\}$$

Jam quoniam quantitates A et B sunt arbitrariae, sumamus $A = \alpha$ et $B = \beta$ ut sit $B\alpha - A\beta = 0$ atque habebimus

$$\partial V = \left\{ \begin{array}{l} n x^{n-1} \partial x e^{-\alpha x} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x) \\ - (\alpha\alpha + \beta\beta) x^n e^{-\alpha x} \partial x \sin \beta x \end{array} \right\}$$

cujus integrale igitur ab $x = 0$ usque ad $x = \infty$ sumtum debet esse $V = 0$ (§. 2.), unde sequitur fore

$$\left. \begin{array}{l} n \int x^{n-1} \partial x e^{-\alpha x} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) \\ - (\alpha\alpha + \beta\beta) \int x^n e^{-\alpha x} \partial x \sin \beta x \end{array} \right\} = 0$$

si scilicet integralia intra praescriptos terminos sumantur.

§. 4. Discerpatur jam prius membrum in duas partes, ponendo

$$\int x^{n-1} \partial x e^{-\alpha x} \sin \beta x = M$$

$$\int x^{n-1} \partial x e^{-\alpha x} \cos \beta x = N$$

atque aequatio nostra erit

$$n\alpha M + n\beta N - (\alpha\alpha + \beta\beta) \int x^n \partial x e^{-\alpha x} \sin \beta x = 0$$

Ponatur autem brevitatis gratia $\alpha\alpha + \beta\beta = ff$ et $\frac{\beta}{\alpha} = \text{tag.}\ \gamma$, ita ut sit $\alpha = f \cos \gamma$ et $\beta = f \sin \gamma$, eritque

$$\int x^n \partial x e^{-\alpha x} \sin \beta x = \frac{n \cos \gamma}{f} . M + \frac{n \sin \gamma}{f} . N.$$

§. 5. Nunc autem pro investiganda altera formula simili modo statuamus $A = \beta$ et $B = -\alpha$, ita ut fiat $A\alpha + B\beta = 0$, tum enim habebimus:

$$\partial V = \left\{ \begin{array}{l} n x^{n-1} \partial x e^{-\alpha x} (\beta \sin \beta x - \alpha \cos \beta x) \\ + (\alpha\alpha + \beta\beta) x^n e^{-\alpha x} \partial x \cos \beta x \end{array} \right\}$$

unde posito pro terminis integrationis stabilitis $V = 0$, habebimus

$$n\beta M - n\alpha N + ff \int x^n \partial x e^{-\alpha x} \cos \beta x = 0$$

unde sequitur fore

$$\int x^n \partial x e^{-\alpha x} \cos \beta x = \frac{n \cos \gamma}{f} . N - \frac{n \sin \gamma}{f} . M.$$

§. 6. Quod si jam consideremus sequentes valores integrales ab $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensos:

$$\int \partial x e^{-\alpha x} \sin \beta x = \mathfrak{M}$$
$$\int x^1 \partial x e^{-\alpha x} \sin \beta x = \mathfrak{M}'$$
$$\int x^2 \partial x e^{-\alpha x} \sin \beta x = \mathfrak{M}''$$

. . . .

. . . .

$$\int x^n \partial x e^{-\alpha x} \sin \beta x = \mathfrak{M}^{(n)}$$

tum vero

$$\int \partial x e^{-\alpha x} \cos \beta x = \mathfrak{N}$$
$$\int x^1 \partial x e^{-\alpha x} \cos \beta x = \mathfrak{N}'$$
$$\int x^2 \partial x e^{-\alpha x} \cos \beta x = \mathfrak{N}''$$

. . . .

. . . .

$$\int x^n \partial x e^{-\alpha x} \cos \beta x = \mathfrak{N}^{(n)}$$

modo vidimus inter quantitates istas $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ semper hujusmodi relationem locum habere, ut sit

$$\mathfrak{M}' = \frac{1 \cdot \cos\gamma}{f}\mathfrak{M} + \frac{1 \cdot \sin\gamma}{f}\mathfrak{N}$$
$$\mathfrak{M}'' = \frac{2 \cdot \cos\gamma}{f}\mathfrak{M}' + \frac{2 \cdot \sin\gamma}{f}\mathfrak{N}'$$
$$\mathfrak{M}''' = \frac{3 \cdot \cos\gamma}{f}\mathfrak{M}'' + \frac{3 \cdot \sin\gamma}{f}\mathfrak{N}''$$

. . . .

. . . .

$$\mathfrak{M}^{(n)} = \frac{n \cdot \cos\gamma}{f}\mathfrak{M}^{(n-1)} + \frac{n \cdot \sin\gamma}{f}\mathfrak{N}^{(n-1)}$$

similique modo

$$\mathfrak{N}' = \frac{1 \cdot \cos\gamma}{f}\mathfrak{N} - \frac{1 \cdot \sin\gamma}{f}\mathfrak{M}$$
$$\mathfrak{N}'' = \frac{2 \cdot \cos\gamma}{f}\mathfrak{N}' - \frac{2 \cdot \sin\gamma}{f}\mathfrak{M}'$$
$$\mathfrak{N}''' = \frac{3 \cdot \cos\gamma}{f}\mathfrak{N}'' - \frac{3 \cdot \sin\gamma}{f}\mathfrak{M}''$$

. . . .

. . . .

$$\mathfrak{N}^{(n)} = \frac{n \cdot \cos\gamma}{f}\mathfrak{N}^{(n-1)} - \frac{n \cdot \sin\gamma}{f}\mathfrak{M}^{(n-1)}.$$

§. 7. Incipiamus nunc a formulis, de quibus supra §. 2. diximus eas seorsim esse evolvendas, scilicet:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \int \partial x e^{-\alpha x} \sin\beta x \\ \mathfrak{N} &= \int \partial x e^{-\alpha x} \cos\beta x\end{aligned}\right\} \text{(§. 6.)}.$$

Pro inveniendis his valoribus in usum vocemus Lemma notissimum: $\int P\partial Q = PQ - \int Q\partial P$, ponendo pro formula $\mathfrak{M}$, $P = \sin\beta x$, et pro $\mathfrak{N}$, $P = \cos\beta x$, pro utraque vero $\partial Q = \partial x e^{-\alpha x}$, hocque facto inveniemus

$$\mathfrak{M} = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\sin\beta x + \frac{\beta}{\alpha}\mathfrak{N}$$
$$\mathfrak{N} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\cos\beta x - \frac{\beta}{\alpha}\mathfrak{M},$$

addita scilicet in postrema constante $\frac{1}{\alpha}$, quoniam integrale sumitur

a termino $x = 0$. Pro altero jam integrationis termino $x = \infty$ erit

$$\mathfrak{M} = \frac{\beta}{\alpha}\mathfrak{N}$$

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\mathfrak{M} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}\mathfrak{N}$$

unde fit $\mathfrak{N} = \frac{\alpha}{\alpha\alpha + \beta\beta}$ et $\mathfrak{M} = \frac{\beta}{\alpha\alpha + \beta\beta}$.

Supra autem (§. 4.) jam posueramus

$$\alpha\alpha + \beta\beta = ff, \quad \alpha = f\cos\gamma, \quad \beta = f\sin\gamma$$

quibus valoribus jam hic introductis erit ab $x = 0$ ad $x = \infty$

$$\mathfrak{M} = \int \partial x e^{-\alpha x} \sin\beta x = \frac{\sin\gamma}{f}$$

$$\mathfrak{N} = \int \partial x e^{-\alpha x} \cos\beta x = \frac{\cos\gamma}{f}$$

§. 8. His autem jam valoribus hoc modo inventis facile reperientur sequentes ope relationum supra §. 6. traditarum:

$$\mathfrak{M}' = \frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{ff} = \frac{\sin 2\gamma}{ff}.$$

$$\mathfrak{N}' = \frac{\cos\gamma^2 - \sin\gamma^2}{ff} = \frac{\cos 2\gamma}{ff}.$$

§. 9. Quod si hoc modo ulterius progrediamur pro formulis $\mathfrak{M}''$ et $\mathfrak{N}''$ reperiemus

$$\mathfrak{M}'' = \frac{2(\sin 2\gamma\cos\gamma + \cos 2\gamma\sin\gamma)}{f^3} = \frac{2\sin 3\gamma}{f^3}$$

$$\mathfrak{N}'' = \frac{2(\cos 2\gamma\cos\gamma - \sin 2\gamma\sin\gamma)}{f^3} = \frac{2\cos 3\gamma}{f^3}$$

tum vero pro formulis $\mathfrak{M}'''$ et $\mathfrak{N}'''$ nanciscimur

$$\mathfrak{M}''' = \frac{2.3(\sin 3\gamma\cos\gamma + \cos 3\gamma\sin\gamma)}{f^4} = \frac{2.3\sin 4\gamma}{f^4}$$

$$\mathfrak{N}''' = \frac{2.3(\cos 3\gamma\cos\gamma - \sin 3\gamma\sin\gamma)}{f^4} = \frac{2.3.\cos 4\gamma}{f^4}.$$

Pro $\mathfrak{M}^{\text{IV}}$ et $\mathfrak{N}^{\text{IV}}$ fiet

$$\mathfrak{M}^{\text{IV}} = \frac{2.3.4\sin 5\gamma}{f^5}$$

$$\mathfrak{N}^{\text{IV}} = \frac{2.3.4\cos 5\gamma}{f^5}$$

unde jam concludere licet fore in genere

$$\mathfrak{M}^{(n)} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,\ldots\ldots n \,.\, \sin(n+1)\gamma}{f^{n+1}}$$

$$\mathfrak{N}^{(n)} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,\ldots\ldots n \,.\, \cos(n+1)\gamma}{f^{n+1}}.$$

§. 10. Quod si nunc brevitatis gratia ponamus $1.2.3.4\ldots.n = \Delta$, tum vero, loco $\mathfrak{M}^{(n)}$ et $\mathfrak{N}^{(n)}$ scribamus formulas integrales his litteris respondentes, nanciscimur

$$\int x^n e^{-\alpha x} \partial x \sin \beta x \left[\begin{smallmatrix} ab\, x = 0 \\ ad\, x = \infty \end{smallmatrix}\right] = \frac{\Delta \sin(n+1)\gamma}{f^{n+1}}$$

$$\int x^n e^{-\alpha x} \partial x \cos \beta x \left[\begin{smallmatrix} ab\, x = 0 \\ ad\, x = \infty \end{smallmatrix}\right] = \frac{\Delta \cos(n+1)\gamma}{f^{n+1}}$$

quae sunt integralia nostra quaesita, quae cum illis ab Eulero loco citato inventis perfecte consentiunt.

§. 11. Quod si nunc porro istam solutionem generalem ad illas formulas applicare velimus, quae Eulerum quondam ad hanc integrationem perduxerant, et ad quas pervenerat insignis ille Geometra in solvendo problemate de linea curva, in qua radius osculi ubique reciproce proportionalis sit arcui, ponendum erit $x = \phi$, $n = -\frac{1}{2}$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, quo facto fit $f = 1$, et tag $\gamma = \infty$, ideoque $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\sin(n+1)\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos(n+1)\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Quod valorem Δ attinet notandum est eum in genere esse terminum indici n respondentem in serie

$$1;\quad 1.2;\quad 1.2.3;\quad 1.2.3.4;\quad \text{etc.}$$

Cum igitur hic terminus sit

$$\Delta = \frac{1^{1-n} \,.\, 2^n}{1+n} \,.\, \frac{2^{1-n} \,.\, 3^n}{2+n} \,.\, \frac{3^{1-n} \,.\, 4}{3+n} \,.\, \frac{4^{1-n} \,.\, 5}{4+n} \,.\ \text{etc.}$$

(Conf. Euleri Inst. Calc. Diff. p. 834.) posito $n = -\frac{1}{2}$ erit

$$\Delta = \frac{1^{\frac{3}{2}} \,.\, 2^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \,.\, \frac{2^{\frac{3}{2}} \,.\, 3^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}} \,.\, \frac{3^{\frac{3}{2}} \,.\, 4^{-\frac{1}{2}}}{\frac{5}{2}} \,.\, \frac{4^{\frac{3}{2}} \,.\, 5^{-\frac{1}{2}}}{\frac{7}{2}} \,.\ \text{etc.}$$

Sumantur jam utrinque quadrata fietque

$$\Delta^2 = \frac{2.2}{1.3} \,.\, \frac{4.4}{3.5} \,.\, \frac{6.6}{5.7} \,.\, \frac{8.8}{7.9} \,.\ \text{etc.} = \frac{\pi}{2}$$

quippe quod est productum Wallisii notissimum, unde porro fit

$\Delta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. His omnibus rite substitutis erit

$$\int \frac{\partial\phi \sin\phi}{\sqrt{\phi}} \left[\begin{smallmatrix} a\phi = 0 \\ a\partial\phi = \infty \end{smallmatrix}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int \frac{\partial\phi \cos\phi}{\sqrt{\phi}} \left[\begin{smallmatrix} a\phi = 0 \\ a\partial\phi = \infty \end{smallmatrix}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(Valor horum Integralium apud Eulerum loco citato reperitur $= \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ob errorem in calculum irreptum).

§. 12. Statuatur porro $n = +\frac{1}{2}$, $x = \phi$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, ita ut $f = \sqrt{2}$, tag. $\gamma = 1$, hinc $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $\sin(n+1)\gamma = \sin\frac{3\pi}{8}$, $\cos(n+1)\gamma = \cos\frac{3\pi}{8}$, $\Delta = \sqrt{\pi}$ unde porro fit

$$\int \partial\phi \sqrt{\phi} e^{-\phi} \sin\phi \left[\begin{smallmatrix} a\phi = 0 \\ a\partial\phi = \infty \end{smallmatrix}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sqrt[4]{2}}$$

$$\int \partial\phi \sqrt{\phi} e^{-\phi} \cos\phi \left[\begin{smallmatrix} a\phi = 0 \\ a\partial\phi = \infty \end{smallmatrix}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{3\pi}{8}}{\sqrt[4]{2}}$$

ubi notandum est fore

$$\sin\frac{3\pi}{8} = \sin 67\tfrac{1}{2}^\circ = \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}$$

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \cos 67\tfrac{1}{2}^\circ = \sin 22\tfrac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}$$

ita ut habeamus

$$\int \partial\phi \sqrt{\phi} e^{-\phi} \sin\phi = \frac{\sqrt{\pi}(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}}$$

$$\int \partial\phi \sqrt{\phi} e^{-\phi} \sin\phi = \frac{\sqrt{\pi}(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}.$$

§. 13. Sit $x = \phi$, $n = -\frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, erit $f = \sqrt{2}$, tag $\gamma = 1$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$ et $\Delta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, hinc

$$\int \frac{\partial\phi\, e^{-\phi} \sin\phi}{\sqrt{\phi}} \left[\begin{smallmatrix} a\phi = 0 \\ a\partial\phi = \infty \end{smallmatrix}\right] = \frac{\sqrt{\pi}(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{\partial\phi\, e^{-\phi} \cos\phi}{\sqrt{\phi}} \left[\begin{smallmatrix} a\phi = 0 \\ a\partial\phi = \infty \end{smallmatrix}\right] = \frac{\sqrt{\pi}(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{ob} \quad \sin(n+1)\gamma = \sin\frac{\pi}{8} = \sin 22\tfrac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}$$

$$\text{et} \quad \cos(n+1)\gamma = \cos\frac{\pi}{8} = \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}.$$

§. 14. In dissertatione initio commemorata varia demonstraveram theoremata calculum integralem spectantia, quorum praecipua haec erant :

$$\frac{\int e^{\alpha\Phi}\Phi\partial\Phi}{\int e^{-\alpha\Phi}\Phi\partial\Phi} = e^{\alpha\pi}$$

$$\frac{\int\Phi\partial\Phi \sin\lambda\Phi}{\int\Phi\partial\Phi\cos\lambda\Phi} = \text{tag}\,\tfrac{1}{2}\lambda\pi$$

denotante Φ functionem quamcunque ipsius Φ et integralibus a $\Phi = 0$ ad $\Phi = \pi$ extensis. His theorematibus nunc sequens analogum adjiecre possumus :

$$\frac{\int\Phi^n\partial\Phi\, e^{-\alpha\Phi}\sin\beta\Phi}{\int\Phi^n\partial\Phi\, e^{-\alpha\Phi}\cos\beta\Phi} = \text{tag}\,(n+1)\gamma$$

siquidem integralia capiantur a termino $x = 0$ ad $x = \infty$ usque, denotante γ arcum cujus tangens est $\frac{\beta}{\alpha}$.

V.

EXPOSITIO METHODI CONCINNAE

INVENIENDI CUJUSCUNQUE PROGRESSIONIS TERMINUM TAM GENERALEM QUAM SUMMATORIUM, PER DIFFERENTIAS CONTINUAS.

Conventui exhibita die. 24. Oct. 1821.

§. 1. Elementorum Algebrae triginta abhinc annis a me editorum ([1]) Caput sextum sectionis quartae tractat de Summatione numerorum polygonalium, hoc est de argumento, cui innititur enumeratio globorum tormentariorum in cumulos pyramidales structorum. In illa vero tractatione brevitati et conceptui tyronum magis quam rigori mathematico consulens, inductioni nimis concesseram. Postmodum autem discipulis in Analysi exercitatioribus aliam tradideram methodum magis directam numeros polygonos summandi, haecque methodus ita erat comparata:

Pro numeris trigonalibus.

§. 2. Designemus summam priorum n numerorum trigonalium charactere $\int\frac{n(n+1)}{2}$, ita ut habeamus

$$\int\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

atque evidens est sumto $n-1$ loco n hanc expressionem transmutari in

$$\int\frac{(n-1)n}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots \frac{(n-1)n}{2}.$$

([1]) Leçons d'Algèbre, à l'usage du Corps *Impérial* des Cadets nobles de terre. St. Pétersb. 1791.

Unde si haec postrema progressio aufferatur a priore remanebit

$$\int \frac{n(n+1)}{2} - \int \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

§. 3. Statuatur nunc

$$\int \frac{n(n+1)}{2} = An^3 + Bn^2 + Cn, \text{ eritque}$$

$$\int \frac{(n-1)n}{2} = A(n-1)^3 + B(n-1)^2 + C(n-1)$$

quorum differentia dabit:

$$\int \frac{n(n+1)}{2} - \int \frac{(n-1)n}{2} = \frac{nn+n}{2} = 3An^2 - 3An + A$$
$$+ 2Bn - B$$
$$+ C$$

unde concluditur fieri debere

$$A = \tfrac{1}{6}, \quad B = \tfrac{1}{2}, \quad C = \tfrac{1}{3}$$

ita ut summa quaesita n numerorum trigonalium primordialium sit

$$\int \frac{n(n+1)}{2} = \tfrac{1}{6} n^3 + \tfrac{1}{2} n^2 + \tfrac{1}{3} n = \tfrac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

Pro numeris quadratis.

§. 4. Simili prorsus modo, ut supra §. 2. factum est, ponamus

$$\int n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$$
$$\int (n-1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2$$

ita ut differentia harum binarum progressionum sit

$$\int n^2 - \int (n-1)^2 = n^2.$$

Tum vero si statuatur

$$\int n^2 = An^3 + Bn^2 + Cn$$
$$\int (n-1)^2 = A(n-1)^3 + B(n-1)^2 + C(n-1)$$

eadem differentia fiet

$$\int n^2 - \int (n-1)^2 = n^2 = 3An^2 - 3An + A$$
$$+ 2Bn - B$$
$$+ C$$

unde facta comparatione intelligitur fieri debere:

$$A = \tfrac{1}{3},\ B = \tfrac{1}{2},\ C = \tfrac{1}{6},$$

ita ut summa quaesita n primorum numerorum quadratorum evadat

$$\int n^2 = \tfrac{1}{3} n^3 + \tfrac{1}{2} n^2 + \tfrac{1}{6} n = \tfrac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1).$$

Pro numeris polygonis m laterum.

§. 5. Ex casibus binis specialibus praemissis jam perspicuum fit si summam $n - 1$ primordialium numerorum polygonorum m laterum, quae est

$$S = \int \frac{(m-2)(n-1)^2 - (m-4)(n-1)}{2} = 1 + m + (3m - 3)$$
$$\ldots\ldots + \frac{(m-2)(n-1)^2 - (m-4)(n-1)}{2}$$

a summa n primorum, quae est

$$S = \int \frac{(m-2) n^2 - (m-4) n}{2} = 1 + m + (3m - 3)$$
$$\ldots\ldots + \frac{(m-2) n^2 - (m-4) n}{2}$$

auferamus, differentiam fore

$$S - s = \frac{(m-2) n^2 - (m-4) n}{2}.$$

Hinc posita altera summa

$$S = An^3 + Bn^2 + Cn$$

altera vero

$$s = A(n - 1)^3 + B(n - 1)^2 + C(n - 1)$$

habebimus differentiam earum

$$S - s = \frac{(m-2) n^2 - (m-4) n}{2} = \begin{array}{r} 3An^2 - 3An + A \\ + 2Bn - B \\ + C \end{array}$$

unde porro nanciscimur

$$A = \frac{m-2}{6},\ B = \tfrac{1}{2},\ C = -\frac{(m-5)}{6},$$

ita ut summa quaesita sit

$$S = \left(\frac{m-2}{6}\right) n^3 + \tfrac{1}{2} n^2 - \left(\frac{m-5}{6}\right) n.$$

§. 6. Denique auditorum versatissimis in Analysi exponere solebam methodum generalem ab Eulero in *Instit. Calc. diff.* traditam cujuscunque progressionis terminum tam generalem quam summatorium investigandi. Huic methodo tandem, quae omnes solutiones supra exhibitas (§§. 2, 3, 4, 5.) et innumeras alias, tanquam casus maxime speciales, in se complectitur, aliam substitueram, quae ope idonei symbolismi, viaque magis directa ac commoda ad formulas non solum valde simplices sed etiam applicationibus admodum accommodatas perducit. Hanc jam postremam methodum, a nemine adhuc, quantum mihi quidem innotuit, adhibitam neque in lucem prolatam heic breviter exhibere in animum induxi.

METHODUS GENERALIS
cujusque progressionis terminum generalem et summatorium investigandi.

§. 7. Cardo rei hic versatur in eligendo idoneo modo signandi uncias potestatum binomii. Cum autem praeter symbolismum ab Eulero in postremis suis dissertationibus de proprietatibus harum unciarum summo cum fructu in analysin introductum nullum invenissem nostro negotio magis accommodatum, in sequentibus utar charactere $\left(\frac{m}{\lambda}\right)$ ad indicandum coëfficientem termini post primum λ^{mi} in potestate m^{ma} binomii evoluti, ita ut sit

$$\left(\frac{m}{\lambda}\right) = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdots \frac{m-\lambda+1}{\lambda}.$$

§. 8. Quod si hic loco m et λ scribamus $m-1$ et $\lambda-1$, erit

$$\left(\frac{m-1}{\lambda-1}\right) = \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} \cdots \frac{m-\lambda+1}{\lambda-1},$$

et si utrinque multiplicemus per $\frac{m}{\lambda}$, habebimus

$$\frac{m}{\lambda}\left(\frac{m-1}{\lambda-1}\right) = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdots \frac{m-\lambda+1}{\lambda},$$

unde intelligitur fore

$$\text{I.} \quad \left(\frac{m}{\lambda}\right) = \frac{m}{\lambda}\left(\frac{m-1}{\lambda-1}\right)$$

§. 9. Simili prorsus modo si in expressione illa fundamentali §. 7. exhibita, manente λ invariato, loco m scribatur $m-1$, prodibit

$$\left(\frac{m-1}{\lambda}\right) = \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} \cdots \frac{m-\lambda+1}{\lambda-1} \cdot \frac{m-\lambda}{\lambda}.$$

Supra autem §. 8. vidimus esse

$$\left(\frac{m-1}{\lambda-1}\right) = \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} \cdots \frac{m-\lambda+1}{\lambda-1}$$

unde nanciscimur hanc relationem:

$$\text{II.} \quad \left(\frac{m-1}{\lambda}\right) = \frac{m-\lambda}{\lambda}\left(\frac{m-1}{\lambda-1}\right),$$

qua a superiore I sublata remanet

$$\text{I} - \text{II} = \left(\frac{m}{\lambda}\right) - \left(\frac{m-1}{\lambda}\right) = \left(\frac{m-1}{\lambda-1}\right).$$

§. 10. Cum autem $\left(\frac{m-1}{\lambda}\right)$ oriatur ex $\left(\frac{m}{\lambda}\right)$, si loco m ponatur $m-1$, quaerendus est valor $f:m$ ita comparatus ut evadat

$$f:m - f:(m-1) = \left(\frac{m-1}{\lambda-1}\right)$$

atque ex praecedentibus evidens est fore $f:m = \left(\frac{m}{\lambda}\right)$. Generalius quidem statui poterit $f:m = \left(\frac{m}{\lambda}\right) + C$, ubi constans C quovis casu debite erit determinanda. Veluti si, ut nostro casu requiritur, functio debeat evanescere posito $m = 0$, erit quoque $C = 0$ et $f:m = \left(\frac{m}{\lambda}\right)$ uti statim posuimus.

§. 11. His praemissis proposita concipiatur progressio quaecunque

$$S = a + b + c + d + \ldots\ldots z,$$

cujus terminorum numerus sit datus $= n$, existente termino postremo seu generali $= z$ et summatorio $= s$; et quaestio eo redit, ut ope datorum terminorum a, b, c, d etc., una cum numero eorum n, quantitates incognitae z et s determinentur. Hunc in finem sumantur differentiae continuae, sitque series differentiarum

1^{arum}: a', b, c', d', etc.
2^{arum}: a'', b'', c'', d'', etc.
3^{arum}: a''', b''', c''', d''', etc.

et ita porro, atque habebimus:

$a' = b - a$	$a'' = b' - a'$	$a''' = b'' - a''$	
$b' = c - b$	$b'' = c' - b'$	$b''' = c'' - b''$	etc.
$c' = d - c$	$c'' = d' - c'$	$c''' = d'' - c''$	
etc.	etc.	etc.	

quibus notatis videndum nunc est quomodo progressionis nostrae propositae

$$s = a + b + c + d + \ldots z$$

terminus generalis z et summa s per numeros datos a, b, c, d, etc. una cum n, investigari queant.

Investigatio termini generalis z.

§. 12. Repraesentetur iste terminus generalis sub hac forma:

$$z = af:n + a'f':n + a''f'':n + \text{etc. (A).}$$

Tum vero omittatur primus terminus progressionis propositae, et cum reliquorum b, c, d, ... z numerus sit $n-1$, erit simili modo:

$$z = bf:(n-1) + b'f':(n-1) + b''f'':(n-1) + \text{etc. (B).}$$

Cum autem sit $b = a + a'$, $b' = a' + a''$, $b'' = a'' + a'''$ et ita porro, his valoribus substitutis, si posteriorem seriem (B) a priore (A) subtrahamus, orietur sequens aequatio:

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} + af:n + a'f:n + a''f'':n + a'''f''':n + \text{etc.} \\ - af:(n-1) - a'f':(n-1) - a''f'':(n-1) - a'''f''':(n-1) - \text{etc.} \\ \qquad - a'f:(n-1) - a''f':(n-1) - a'''f'':(n-1) - \text{etc.} \end{array} \right\} \text{(C).}$$

§. 13. *Primo* igitur ex hac aequalitate sequitur fieri debere

$$f:n - f:(n-1) = 0,$$

unde intelligitur fore $f:n$ quantitatem constantem. Quoniam autem in progressione proposita, posito $n = 1$, fieri debet $z = a$

(§. 11), evidens est hanc constantem fore ipsam unitatem, ita ut habeamus

$$f : n = 1 \text{ et } f : (n - 1) = 1.$$

§. 14. *Secundo* evanescere debet coëfficiens ipsius a' in aequatione illa (C), unde sequitur fore

$$f' : n - f' : (n - 1) - f : (n - 1) = 0.$$

Est vero $f : (n - 1) = 1$ (§. 13.), ideoque

$$f' : n - f' : (n - 1) = 1 = \left(\tfrac{m-1}{\lambda-1}\right) \text{ (§. 10.)},$$

unde concluditur fore $\lambda = 1$, ergo $f' : n = \left(\tfrac{m}{1}\right)$. Quoniam autem in termini generalis forma ficta §. 12, scil.

$$z = af : n + a'f' : n + a''f'' : n + \text{etc.}$$

coëfficiens secundi termini $f' : n$ evanescere debet sumto $n = 1$, erit $m = n - 1$ et $f' : n = \left(\tfrac{m}{1}\right) = \left(\tfrac{n-1}{1}\right)$, ideoque

$$f' : (n - 1) = \left(\tfrac{n-2}{1}\right).$$

§. 15. *Tertio* evanescere debet coëfficiens ipsius a'' in aequatione illa (C), hoc est fieri debet:

$$f'' : n - f'' : (n - 1) = f' : (n - 1) = \left(\tfrac{n-2}{1}\right) \text{ (§. 14.)}$$

unde ex §. 10. sequitur fore $m = n - 1$ et $\lambda = 2$. Erit igitur $f'' n = \left(\tfrac{n-1}{2}\right)$, hinc

$$f'' : (n - 1) = \left(\tfrac{n-2}{2}\right).$$

§. 16. *Quarto* in aequatione (C) evanescere quoque debet coëfficiens ipsius a''', unde fluit conditio

$$f''' : n - f''' : (n - 1) = f'' : (n - 1) = \left(\tfrac{n-2}{2}\right) \text{ (§. 15.)}$$

Ex §. 10. vero sequitur fore $m = n - 1$ et $\lambda = 3$, ac proinde $f''' : n = \left(\tfrac{n-1}{3}\right)$.

§. 17. Quod si has operationes ulterius prosequamur, reperie-

mus simili prorsus modo coëfficientes terminorum a^{IV}, a^{V}, a^{VI}, etc. progressionis (A), qui erunt $f^{IV}:n = \binom{n-1}{4}$; $f^{V}:n = \binom{n-1}{5}$ et ita porro. Hinc terminus generalis quaesitus progressionis propositae erit

$$z = a + \binom{n-1}{1} a' + \binom{n-1}{2} a'' + \binom{n-1}{3} a''' + \text{etc.}$$

Investigatio termini summatorii s.

§. 18. Hic rem brevius expedire licebit, quoniam in praecedente articulo jam omnia fusius sunt explicata et ad scopum propositum praeparata. Ponatur, ut supra §. 12. pro z fecimus:

$$s = af:n + a'f':n + a''f'':n + \text{etc.},$$

ubi notetur sumto $n = 0$ fore etiam $s = 0$. Rejecto jam in progressione §. 11. proposita termino primo a, reliquorum numerus est $n-1$, summa vero $s-a$, pro qua ergo habebimus hanc seriem:

$$s - a = bf:(n-1) + b'f':(n-1) + b''f'':(n-1) + \text{etc.}$$

Quod si in hac serie loco b, b', b'', etc. valores ante §. 12. dati scribantur eaque a serie s aufferatur, remanebit

$$a = \left\{ \begin{array}{l} + af:n + a'f':n + a''f'':n + \text{etc.} \\ - af:(n-1) - a'f':(n-1) - a''f'':(n-1) - \text{etc.} \\ \qquad\qquad - a'f:(n-1) - a''f':(n-1) - \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

§. 19. Hinc sequitur *primo* esse debere $f:n - f:(n-1) = 1$, unde $f:n = \binom{n}{1}$ et $f:(n-1) = \binom{n-1}{1}$. Porro sequitur *secundo* fore $f':n - f':(n-1) = f:(n-1) = \binom{n-1}{1} = \binom{m-1}{\lambda-1}$ (§. 10.) ergo $m = n$ et $\lambda = 2$, hinc

$$f':n = \binom{n}{2} \text{ et } f':(n-1) = \binom{n-1}{2}.$$

Tertio debet esse

$$f'':n - f'':(n-1) = f':(n-1) = \binom{n-1}{2} = \binom{m-1}{\lambda-1},$$

unde $m = n$ et $\lambda = 3$, consequenter

$$f'':n = \binom{n}{3} \text{ et } f'':(n-1) = \frac{n-1}{3}.$$

Simili modo invenietur

$$f''' : n = \left(\frac{n}{4}\right), \quad f^{\text{IV}} : n = \left(\frac{n}{5}\right)$$

et ita porro. Summa igitur nostrae progressionis propositae erit

$$s = \left(\frac{n}{1}\right) a + \left(\frac{n}{2}\right) a' + \left(\frac{n}{3}\right) a'' + \left(\frac{n}{4}\right) a''' + \text{etc.}$$

§. 20. Inventas jam has expressiones generales pro termino generali et summatorio datae progressionis operae pretium erit ad aliquot casus speciales applicasse, idque duplici ratione, primo ut veritas earum clarius elucescat, tum vero quo melius intelligitur quantopere eae ad hujusmodi applicationes accommodatae sint.

APPLICATIO

harum formularum ad aliquot casus speciales.

1) *Ad numeros polygonos.*

§. 21. Cum in progressione horum numerorum differentiae secundae debeant esse constantes et aequales numero laterum binario minuto, erit progressio:

$$s = 1 + m + (3m - 3) + (6m - 8) + (10m - 15) + \ldots + z$$

cujus quaeramus terminum generalem z et summatorium s ope formularum generalium supra §. 17. et 19. exhibitarum, sequentem in modum. Cum sit

$a = 1$	$a' = m - 1$	$a'' = m - 2$	$a''' = 0$
$b = m$	$b' = 2m - 3$	$b'' = m - 2$	$b''' = 0$
$c = 3m - 3$	$c' = 3m - 5$	$c'' = m - 2$	etc.
$d = 6m - 8$	$d' = 4m - 7$	etc.	
$e = 10m - 15$	etc.		
etc.			

his valoribus pro a, a', a'', a''' substitutis in expressionibus pro et s supra inventis nanciscimur:

$$z = 1 + (n-1)(m-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}(m-2);$$

$$s = n + \frac{n(n-1)}{2}(m-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}(m-2);$$

quae expressiones, facta evolutione ordinatisque terminis secundum potestates ipsius n, abeunt in:

$$z = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$$

$$s = \frac{(m-2)}{6}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 - \left(\frac{m-5}{6}\right)n$$

prorsus uti §. 5. fuerant inventae.

2) *Ad numeros quadratos.*

§. 22. Pro progressione numerorum quadratorum habebimus

$a = 1$	$a' = 3$	$a'' = 2$	$a''' = 0$
$b = 4$	$b' = 5$	$b'' = 2$	$b''' = 0$
$c = 9$	$c' = 7$	$c'' = 2$	etc.
$d = 16$	$d' = 9$	etc.	
$e = 25$	etc.		
etc.			

Hinc terminus generalis erit

$$z = 1 + 3(n-1) + 2\frac{(n-1)(n-2)}{2} = n^2$$

et summatorius

$$s = n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

quemadmodum etiam supra §. 4. erat inventus.

3) *Ad numeros cubicos.*

§. 23. Pro progressione horum numerorum habebimus

$a = 1$	$a' = 7$	$a'' = 12$	$a''' = 6$	$a^{IV} = 0$
$b = 8$	$b' = 19$	$b'' = 18$	$b''' = 6$	etc.
$c = 27$	$c' = 37$	$c'' = 24$	etc.	
$d = 64$	$d' = 61$	etc.		
$e = 125$	etc.			
etc.				

unde substitutis in formulis generalibus pro z et s inventis valoribus a, a', a'', a''' prodibit terminus generalis

$$z = 1 + 7\left(\frac{n-1}{1}\right) + 12\left(\frac{n-1}{2}\right) + 6\left(\frac{n-1}{3}\right) = n^3$$

et summatorius

$$s = \left(\frac{n}{1}\right) + 7\left(\frac{n}{2}\right) + 12\left(\frac{n}{3}\right) + 6\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4) *Ad numeros biquadratos.*

§. 24. Pro horum numerorum progressione differentiae ita se habent:

$a = 1$	$a' = 15$	$a'' = 50$	$a''' = 60$	$a^{IV} = 24$	$a^{V} = 0$
$b = 16$	$b' = 65$	$b'' = 110$	$b''' = 84$	$b^{IV} = 24$	etc.
$c = 81$	$c' = 175$	$c'' = 194$	$c''' = 108$	etc.	
$d = 256$	$d' = 369$	$d'' = 302$	etc.		
$e = 625$	$e' = 671$	etc.			
$f = 1296$	etc.				
etc.					

quibus valoribus rite substitutis terminus generalis elicitur sequenti modo expressus:

$$z = 1 + 15\left(\frac{n-1}{1}\right) + 50\left(\frac{n-1}{2}\right) + 60\left(\frac{n-1}{3}\right) + 24\left(\frac{n-4}{4}\right) = n^4$$

terminus vero summatorius ita:

$$s = \left(\frac{n}{1}\right) + 15\left(\frac{n}{2}\right) + 50\left(\frac{n}{3}\right) + 60\left(\frac{n}{4}\right) + 24\left(\frac{n}{5}\right),$$

quae expressio reducitur ad hanc formam:

$$s = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30},$$

sive per factores ad hanc:

$$s = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Hinc sequitur si summa n primorum numerorum biquadratorum dividatur per summam n numerorum quadratorum, quotientem ex hac divisione natum fore $\frac{3n^2+3n-1}{5}$.

5) *Ad numeros qui sunt aggregata Trigonalium.*

§. 25. Hic igitur progressio, cujus quaeritur terminus generalis et summatorius, haec est :

$$s = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 \ldots\ldots z$$

unde sequitur fore

$a = 1$	$a' = 3$	$a'' = 3$	$a''' = 1$	$a^{IV} = 0$
$b = 4$	$b' = 6$	$b'' = 4$	$b''' = 1$	etc.
$c = 10$	$c' = 10$	$c'' = 5$	etc.	
$d = 20$	$d' = 15$	etc.		
$e = 35$	etc.			
etc.				

Hinc autem substituendo assequimur

$$z = 1 + 3\left(\frac{n-1}{1}\right) + 3\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1\left(\frac{n-1}{3}\right)$$

$$s = 1\left(\frac{n}{1}\right) + 3\left(\frac{n}{2}\right) + 3\left(\frac{n}{3}\right) + 1\left(\frac{n}{4}\right)$$

qui valores, facta evolutione, sequentes induunt formas :

$$z = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \left[\frac{n+2}{3}\right]$$

$$s = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} = \left[\frac{n+3}{4}\right].$$

VI.

RESOLUTIO

DUARUM AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM SECUNDI GRADUS.

Conventui exhibita die 24. Febr. 1819.

§. 1. Aequationes differentiales secundi gradus, de quarum resolutione hic disserere constitui, ita se habent:

$$\text{I. } \frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = - \alpha uu \frac{\partial x}{\partial s},$$

$$\text{II. } \frac{\partial\partial y}{2g\partial t^2} = - 1 - \alpha uu \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Ad hujusmodi aequationes perducit solutio problematis ballistici, si aëris resistentia ut constans spectetur, denotantibus scilicet x et y coordinatas obliquangulas, s arcum percursum tempore t in curva a projectili descripta, u celeritatem ejus elapso tempore t acquisitam, ∂t elementum temporis, quod constans assumitur et α multiplicatorem constantem pendentem a pondere et diametro globi, a densitate materiae ejus aërisque, ab altitudine celeritati debita, etc. Hic autem animum a phaenomenis motus penitus abstrahendo problema tanquam mere analyticum spectabo et considerationes nonnullas ad quas resolutio illarum aequationum perduxit, breviter exhibebo.

§. 2. Quod ipsam resolutionem attinet, ea sequenti modo commodissime absolvitur. Ad primam aequationem in ∂x ductam addatur secunda ducta in ∂y, prodibitque

$$\text{I. } \partial x + \text{II. } \partial y = \frac{\partial x\partial\partial x + \partial y\partial\partial y}{2g\partial t^2} = - \partial y - \frac{\alpha uu(\partial x^2 + \partial y^2)}{\partial s}$$

Est vero $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$, $\partial x\partial\partial x + \partial y\partial\partial y = \partial s\partial\partial s$ et $u = \frac{\partial s}{\partial t}$, quibus substitutis fiet

III.) $\frac{\partial s \partial\partial s}{2g\partial t^2} = - \partial y - \frac{\alpha \partial s^3}{\partial t^2}$.

Deinde si a secunda in ∂x ducta aufferatur prima ducta in ∂y, habebimus

$$\text{II. } \partial x - \text{I. } \partial y = \frac{\partial x \partial\partial y - \partial y \partial\partial x}{2g\partial t^2} = - \partial x.$$

Quodsi nunc in III. ponatur $\alpha = \frac{\beta}{2g}$, ea in hanc abit formam:

$$\text{III.)} \quad \frac{\partial s \partial\partial s + \beta \partial s^3}{2g\partial t^2} = - \partial y$$

atque nunc ex hac postrema aequatione, una cum

$$\text{IV.)} \quad \frac{\partial x \partial\partial y - \partial y \partial\partial x}{2g\,\partial t^2} = - \partial x$$

solutionem peti oportet.

§. 3. Introducatur hunc in finem inclinatio curvae ad horizontem, quam vocemus Φ, eritque

$$\partial x = \partial s \cos\Phi, \quad \partial y = \partial s \sin\Phi$$

quibus valoribus una cum suis differentialibus, in aequationibus III et IV substitutis, prodibunt hae novae aequationes:

$$\text{V.)} \quad \frac{\partial\partial s + \beta \partial s^2}{2g\partial t^2} = - \sin\Phi,$$

$$\text{VI.)} \quad \frac{\partial s \partial\Phi}{2g\partial t^2} = - \cos\Phi.$$

§. 4. Harum aequationum si posterior, in $\sin\Phi$ ducta, aufferatur a priore ducta in $\cos\Phi$, prodibit

$$\text{V. } \cos\Phi - \text{VI. } \sin\Phi = \frac{\partial\partial s \cos\Phi - \partial s \partial\Phi \sin\Phi + \beta \partial s^2 \cos\Phi}{2g\partial t^2} = 0.$$

Dividatur per $\partial s \cos\Phi$ eritque

$$\frac{\partial\partial s}{\partial s} - \frac{\partial\Phi \sin\Phi}{\cos\Phi} + \beta \partial s = 0$$

cujus integrale est

$$l\partial s + l\cos\Phi + \beta s = \text{const.} = \gamma\, l\partial t,$$

quod etiam ita repraesentari potest:

$$l\partial s \cos\Phi - l\partial t = (\gamma - 1)\, l\partial t - \beta s,$$

(ob ∂t constans), sive etiam ita:

$$l\,\frac{\partial s \cos\Phi}{\partial t} = l\,C + l\,e^{-\beta s}$$

ita ut habeamus

$$\frac{\partial s \cos\Phi}{\partial t} = C e^{-\beta s}.$$

§. 5. Ex hac jam aequatione quaeratur ∂t, quo invento erit

$$2 g \partial t^2 = \frac{\partial s^2 \cos\Phi^2}{\delta e^{-2\beta s}}.$$

Ita ex aequatione VI habebimus

$$\frac{\delta \partial \Phi e^{-2\beta s}}{\partial s \cos\Phi^2} + \cos\Phi = 0$$

unde concluditur fore

$$\frac{\partial s e^{2\beta s}}{\delta} = -\frac{\partial\Phi}{\cos\Phi^3}$$

hincque integrando adipiscimur

$$\frac{e^{2\beta s}}{2\beta\delta} = -\int \frac{\partial\Phi}{\cos\Phi^3}$$

sive, postremo membro quoque actu integrato habebimus

$$\frac{e^{2\beta s}}{2\beta\delta} = -\frac{\sin\Phi}{2\cos\Phi^2} - \tfrac{1}{2} l \operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi) + C.$$

§. 6. Hoc modo resolutionem aequationum propositarum perduximus ad aequationem in qua quantitates variabiles sunt separatae, cujusque ope s per Φ facile innotescit, cum sit

$$s = \frac{1}{2\beta} l\, 2\beta\delta F : \Phi + \Delta.$$

Difficile autem foret ipsum angulum Φ per arcum s determinare. Quo hoc praestetur sit $\frac{e^{2\beta s}}{2\beta\delta} = -z$ ita ut $\partial z = \frac{\partial\Phi}{\cos\Phi^3}$ et facile nunc erit pro functione quacunque anguli Φ, veluti pro $\sin\Phi$, seriem invenire secundum potestates ipsius z procedentem, quemadmodum ex solutione sequentis problematis patebit.

Problema.

§. 7. *Si fuerit* $\partial z = \frac{\partial\Phi}{\cos\Phi^3}$ *et ita integretur ut fiat* $\Phi = \zeta$ *sumto* $z = 0$, *invenire seriem secundum potestatem ipsius* y *procedentem quae exprimat valorem* $\sin\Phi$. —

Solutio.

Statuamus seriem quaesitam esse

$$\text{I.} \quad \sin\Phi = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$$

Sumantur ejus differentialia, primum, secundum, tertium, etc. et in quavis differentiatione loco $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ scribatur $\cos\Phi^3$, quo facto reperientur sequentes series:

$$\text{II.} \quad \cos\Phi^4 = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \text{etc.}$$

$$\text{III.} \quad -4\sin\Phi\cos\Phi^6 = 2C + 3.2Dz + 4.3Ez^2 + 5.4Fz^3 + \text{etc.}$$

$$\text{IV.} \quad \cos\Phi^8(24 - 28\cos\Phi^2) = 3.2.1\,D + 4.3.2Ez + 5.4.3\,Fz^2 + \text{etc.}$$

$$\text{V.} \quad \sin\Phi\cos\Phi^{10}(-8.24 + 10.28\cos\Phi^2) = 4.3.2.1E + 5.4.3.2Fz + \text{etc.}$$

etc. etc.

Ponatur nunc in singulis $z = 0$ et quia tum fieri debet $\Phi = \zeta$, fiet:

Ex I. $A = \sin\zeta$

— II. $B = \cos\zeta^4$

— III. $C = -2\sin\zeta\cos\zeta^6$

— IV. $D = \cos\zeta^8(4 - \frac{14}{3}\cos\zeta^2)$

— V. $E = \sin\zeta\cos\zeta^{10}(8 - \frac{35}{3}\cos\zeta^2)$

etc. etc.

Hinc si fuerit $\zeta = 0$, erit $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = -\frac{2}{3}$, $E = 0$, etc.

Problema generalius.

§. 8. *Si fuerit x functio quaecunque ipsius x, quae posito $x = p$ abeat in P atque ponatur $z = X - P$ ita ut z evanescat posito $X = P$, invenire seriem secundum potestates ipsius z procedentem, cujus summa sit functio quaecunque data ipsius x, quam vocemus Φ.*

Solutio.

Statuatur series quaesita

$$\Phi = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$$

cujus coëfficientes A, B, C, D, etc. debent esse certae functiones

ipsius p. Quod si autem p ut constans spectetur, ob $z = X - P$ erit $\partial z = \partial X$. Jam haec series differentietur, ac dividendo per $\partial z = \partial X$ habebimus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \text{etc.} = \Phi'$$

Simili modo procedendo erit

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial X} = 2C + 3 \,.\, 2Dz + 4 \,.\, 3Ez^2 + \text{etc.} = \Phi'',$$

$$\frac{\partial \Phi''}{\partial X} = 3 \,.\, 2D + 4 \,.\, 3 \,.\, 2Ez + 5 \,.\, 4 \,.\, 3Fz^2 + \text{etc.} = \Phi''',$$

et ita porro. Ponatur nunc $z = 0$, et cum hoc casu fiat $X = P$, abeat Φ in Π; eritque ex serie prima $A = \Pi$. Si porro valores Φ', Φ'', Φ''', posito $x = p$ abeant in Π', Π'', Π''', etc. ex secunda aequatione, posito $z = 0$, fiet

$$B = \Pi' = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = \frac{\partial A}{\partial P}.$$

Simili modo erit ex tertia serie:

$$2\,C = \Pi'' = \frac{\partial \Pi'}{\partial P} = \frac{\partial B}{\partial P}$$

tum vero ex quarta:

$$3 \,.\, 2\,D = \Pi''' = \frac{\partial \Pi''}{\partial P} = 2\,\frac{\partial C}{\partial P}$$

et ita porro. Hoc igitur modo coëfficientes seriei quaesitae pro Φ sunt determinati; erit enim

$$A = \Pi;\ B = \frac{\partial A}{\partial P};\ C = \frac{\partial B}{2\partial P};\ D = \frac{\partial C}{3\partial P};$$

et ita porro. Hanc solutionem generalem aliquot exemplis illustrabo.

Exemplum 1.

§. 9. Sit $X = x$, ideoque $x = p + z$. Hinc erit

$$A = \Pi,\ B = \frac{\partial A}{\partial P},\ C = \frac{\partial B}{2\partial P},\ D = \frac{\partial C}{3\partial P},\ \text{etc.}$$

Unde si sumatur $\Phi = x^n = (p + z)^n$ erit $\Pi = p^n$, ergo

$$A = p^n,$$

$$B = \frac{n}{1} p^{n-1},$$

$$C = \frac{n(n-1)}{1.2} p^{n-2},$$

$$D = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} p^{n-3},$$

etc. etc.

Hinc autem sequitur fore

$$(p+z)^n = p^n + \frac{n}{1} p^{n-1} z + \frac{n(n-1)}{1.2} p^{n-2} z^2 + \text{etc.}$$

Exemplum 2.

§. 10. Sumatur $\Phi = e^x = e^{p+z}$, erit $\Pi = e^p$. Hinc autem fit

$$A = e^p,\ B = \frac{e^p}{1},\ C = \frac{e^p}{1.2},\ D = \frac{e^p}{1.2.3},\ \text{etc.}$$

consequenter erit

$$e^{p+z} = e^p\left[1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} \text{ etc.}\right]$$

quod cum notissima summatione, aeque ac praecedens exemplum egregie convenit.

Exemplum 3.

§. 11. Sumatur $\Phi = x = \sqrt[n]{p^n + z}$, positoque $z = 0$ abit Φ in $\Pi = p$, unde fit $A = p$, et $B = 1$; tum autem omnes sequentes C, D, E, etc. prodirent $= 0$, quae solutio veritati non foret consentanea: genuinam obtinebimus, si notemus hic poni $X = x^n$, ita ut $P = p^n$, hinc $\partial P = np^{n-1}\partial p$; tum enim, ob $x^n = p^n + z$, hoc est $X = P + Z$ (§. 8.) erit $\Phi = x = \sqrt[n]{p^n + z}$. Valores autem coëfficientium A, B, C, D, etc. nunc ita reperientur expressi:

$$A = p,$$

$$B = \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{1}{np^{n-1}},$$

$$C = \frac{\partial B}{2\partial P} = -\frac{(n-1)}{2nnp^{2n-1}},$$

$$D = \frac{\partial C}{3\partial P} = +\frac{(n-1)(2n-1)}{2.3n^3 p^{3n-1}}.$$

etc. etc. etc.

Erit igitur, ut jam aliunde constat:

$$\sqrt[n]{p^n + z} = p + \frac{z}{np^{n-1}} - \frac{(n-1)z^2}{2n^2 p^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)z^3}{2.3n^3 p^{3n-1}} - \text{etc.}$$

Problema inversum.

§. 12. *Proposita hac serie secundum potestates variabilis z procedente:*

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

ubi A est functio quaecunque ipsius p, sequentes autem litterae ex praecedentibus ita definiuntur ut sit

$$B = \frac{\partial A}{\partial P}, \quad C = \frac{\partial B}{2\partial P}, \quad D = \frac{\partial C}{3\partial P}, \text{ etc.}$$

existente P functione data ipsius p, invenire summam hujus seriei.

Solutio.

Sit summa quaesita $= S$, ita ut habeamus

$$S = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$$

eritque S functio binarum variabilium p et z, quae posito $z = 0$ abit in Π. Erit igitur differentiando

$$\text{I.} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right) = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \text{etc.}$$

$$\text{II.} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right) = \frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial B}{\partial p}z + \frac{\partial C}{\partial p}z^2 + \frac{\partial D}{\partial p}z^3 + \text{etc.}$$

Ex secunda autem deducitur

$$\frac{\partial p}{\partial P}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right) = \frac{\partial A}{\partial P} + \frac{\partial B}{\partial P}z + \frac{\partial C}{\partial P}z^2 + \frac{\partial D}{\partial P}z^3 + \text{etc.}$$

Cum igitur sit $\frac{\partial A}{\partial P} = B$, $\frac{\partial B}{\partial P} = 2C$, $\frac{\partial C}{\partial P} = 3D$, $\frac{\partial D}{\partial P} = 4E$, et ita porro, erit

$$\frac{\partial p}{\partial P}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right) = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \text{etc.}$$

unde sequitur fore

$$\frac{\partial p}{\partial P}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)$$

Quod si statuamus $\partial S = M\partial z + N\partial p$, erit $M = \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)$ et $N = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)$ ideoque $M = \frac{\partial p}{\partial P} N$, hinc

$$\partial S = M(\partial z + \partial P)$$

unde integrando nanciscimur summam seriei quaesitam

$$S = F : (P + z).$$

Corollarium.

§. 13. Supra §. 8. posuimus sumto $z = 0$ summam seriei abire in Π. Erit igitur $\Pi = F : P$; unde intelligitur summam quaesitam S talem esse functionem ipsius $P + z$ qualis Π est functio ipsius P. Haecque conditio nobis viam aperit valde notam ad solutionem problematis generalioris §. 8. datam perveniendi, quam igitur solutionem hic breviter ob oculos ponam.

Alia solutio problematis §^{i} 8.

§. 14. Cum quaeri debeant valores litterarum A, B, C, etc. in serie:

$$\Phi = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$$

nunc vero noverimus Φ esse debere talem functionem ipsius $P + z$, qualis Π est ipsius P, hoc ipso convincimur fieri debere

$$\Phi = \Pi + \frac{z\partial\Pi}{\partial P} + \frac{z^2\partial^2\Pi}{1.2\partial P^2} + \frac{z^3\partial^3\Pi}{1.2.3\partial P^3} + \text{etc.}$$

ita ut habeamus

$$A = \Pi,$$

$$B = \frac{\partial\Pi}{\partial P} = \frac{\partial A}{\partial P},$$

$$C = \frac{\partial^2\Pi}{1.2\partial P^2} = \frac{\partial B}{2\partial P},$$

$$D = \frac{\partial^3\Pi}{1.2.3.\partial P^3} = \frac{\partial C}{3\partial P},$$

et ita porro, qui valores cum supra §. 8. inventis perfecte congruunt.

Exemplum.

§. 15. Exemplis jam supra §§. 9, 10, 11, exhibitis adjungamus adhuc quartum notatu haud indignum, ponendo

$$X = \int \frac{\partial x}{\cos x} = l\,\mathrm{tg}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2} x);$$

et cum X abeat in P posito $x = p$, erit $P = l\,\mathrm{tg}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2} p)$. Sumatur nunc $\Phi = \mathrm{tg}\, x$, eritque $\Pi = \mathrm{tg}\, p$, unde cum sit $\partial P = \frac{\partial p}{\cos p}$, habebimus pro A, B, C, etc. sequentes valores

$$A = \Pi = \mathrm{tg}\, p,$$
$$B = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = \frac{1}{\cos p} = \sec p,$$
$$C = \frac{\partial^2 \Pi}{2 \partial P^2} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\, p,$$
$$D = \frac{\partial^3 \Pi}{6 \partial P^3} = \tfrac{1}{6} \sec p,$$
$$E = \frac{\partial^4 \Pi}{24 \partial P^4} = \tfrac{1}{24}\,\mathrm{tg}\, p,$$

et ita porro. His valoribus substitutis series quaesita erit duplex, scilicet:

$$\Phi = \mathrm{tg}\, x = \begin{cases} + \mathrm{tg}\, p\ [1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 + \frac{1}{720} z^6 + \text{etc.}] \\ + \sec p\ [z + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^6 + \frac{1}{5040} z^7 + \text{etc.}]. \end{cases}$$

Demonstratio hujus summationis.

§. 16. Operae pretium videtur veritatem hujus summationis accuratius examinasse, quod negotium, quantumvis intricatum et operosum videatur, tamen sequenti modo expedite absolvitur. Commodissime enim hic usu venit, ut ambarum serierum, in expressione ipsius Φ occurrentium, summae jam innotescant, cum sit

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{24} z^4 + \tfrac{1}{720} z^6 + \text{etc.}$$
$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \tfrac{1}{6} z^3 + \tfrac{1}{120} z^5 + \tfrac{1}{5040} z^7 + \text{etc.}$$

Hinc enim sequitur fore

$$\Phi = \text{tg}\, x = \text{tg}\, p \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) + \sec p \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right).$$

Jam cum sit (ex §. 8.) $z = x - P$, tum vero (ex §. 15.) $x - P = l\,\frac{\text{tg}\,(45^\circ + \frac{1}{2}x)}{\text{tg}\,(45^\circ + \frac{1}{2}p)}$, erit

$$e^z = \frac{\text{tg}\,(45^\circ + \frac{1}{2}x)}{\text{tg}\,(45^\circ + \frac{1}{2}p)};$$

$$e^{-z} = \frac{\text{tg}\,(45^\circ - \frac{1}{2}x)}{\text{tg}\,(45^\circ - \frac{1}{2}p)}.$$

Constat autem esse

$$\text{tg}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x},$$

$$\text{tg}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x},$$

unde expressiones pro e^z et e^{-z} modo inventae sequentem in modum transformabuntur:

$$e^z = \frac{1 + \sin x}{1 + \sin p} \cdot \frac{\cos p}{\cos x},$$

$$e^{-z} = \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} \cdot \frac{\cos p}{\cos x}.$$

Erit igitur componendo

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{\cos p}{\cos x} \left(\frac{1 - \sin p \sin x}{\cos p^2}\right);$$

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{\cos p}{\cos x} \left(\frac{\sin x - \sin p}{\cos p^2}\right).$$

Facta jam substitutione habebimus

$$\Phi = \text{tg}\, x = \frac{\sin p}{\cos p^2 \cos x} (1 - \sin p \sin x) + \frac{1}{\cos p^2 \cos x} \sin x - \sin p)$$

quod ita reducitur

$$\Phi = \text{tg}\, x = \frac{1}{\cos p^2 \cos x} [\sin x - \sin x \sin p^2]$$

sive denique

$$\Phi = \text{tg}\, x = \frac{\cos p^2 \sin x}{\cos p^2 \cos x}.$$

VII.

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME GÉNÉRAL RELATIF AU CALCUL INTÉGRAL.

Présenté à l'Académie le 9. Oct. 1822.

§. 1. Dans un mémoire de feu L. Euler ayant pour titre : *De unciis potestatum binomii earumque interpolatione* (¹), où l'on ne s'attendroit guères à rencontrer des recherches nombreuses et suivies concernant des formules intégrales et leurs relations respectives, j'ai trouvé le théorème suivant: *Le produit des intégrales* :

I. $\int x^{\alpha - 1} \partial x (1 - x)^{n - \alpha}$

II. $\int x^{\beta - 1} \partial x (1 - x)^{n - \alpha - \beta}$

III. $\int x^{\gamma - 1} \partial x (1 - x)^{n - \alpha - \beta - \gamma}$

IV. $\int x^{\delta - 1} \partial x (1 - x)^{n - \alpha - \beta - \gamma - \delta}$

etc.

prises depuis $x = 0$ *jusqu'à* $x = 1$, *garde toujours la même valeur, quelque permutation qu'on fasse subir aux lettres* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc.

§. 2. Quelque belle et même rigoureuse que soit la démonstration de ce théorème qu'on pourroit tirer du mémoire cité, en la déduisant de la considération des coëfficiens du binome, comme ce seroit une source féconde à la verité mais indirecte et dérivée d'un domaine étranger, j'ai cru que ce ne seroit pas un travail tout-à-fait inutile que d'en chercher une démonstration plus directe déduite des principes du calcul intégral; et quoique le sujet ne soit pas d'un intérêt majeur, je n'hésite pas à présenter ici celle que j'ai

(¹) Mémoires de l'Acad. *Imp.* des Sciences, Tome IX, pag. 57.

trouvée, parce que la route qui m'y a conduit peut avoir son utilité dans d'autres recherches de cette nature.

§. 3. La marche la plus naturelle à suivre m'a d'abord paru être celle de convertir le produit des intégrales proposées, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, en un produit infini et d'examiner ensuite chaque facteur de ce produit pour voir si la permutation des lettres α, β, γ, δ, etc. lui fait subir un changement ou non.

§. 4. Ma méthode de transformer le produit des intégrales proposées en un produit composé d'un nombre infini de facteurs finis est fondée sur la réduction suivante :

$$\int x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} = \frac{p+q}{p}\int x^p \partial x(1-x)^{q-1}$$

les intégrales étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, et je démontre cette réduction de la manière suivante.

§. 5. Je considère la fonction $x^p(1-x)^q$, dont je prends la différentielle, qui est

$$px^{p-1}\partial x(1-x)^q - qx^p\partial x(1-x)^{q-1}$$

que je représente ainsi :

$$[px^{p-1}\partial x - (p+q)x^p\partial x](1-x)^{q-1}$$

pour avoir

$$x^p(1-x)^q = p\int x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} - (p+q)\int x^p\partial x(1-x)^{q-1}$$

et parceque le membre $x^p(1-x)^q$ s'évanouit, lorsque les intégrales se prennent jusqu'à $x = 1$, il en résulte que

$$\int x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} = \frac{p+q}{p}\int x^p\partial x(1-x)^{q-1}$$

et voilà la réduction du §. 4. démontrée, où il y a une observation à faire, qui nous sera utile dans la suite, c'est que les deux formules intégrales deviendront égales lorsque les exposans de x deviendront infinis ; car en mettant $p = \infty$, on aura $\frac{p+q}{p} = 1$.

§. 6. En traitant de la même manière les fonctions

$$x^{p+1}(1-x)^q,\quad x^{p+2}(1-x)^q,\quad x^{p+3}(1-x)^q$$

et ainsi de suite on démontrera avec la même facilité les réductions suivantes :

$$\int x^p\,\partial x\,(1-x)^{q-1} = \frac{p+q+1}{p+1}\int x^{p+1}\,\partial x\,(1-x)^{q-1}$$

$$\int x^{p+1}\partial x\,(1-x)^{q-1} = \frac{p+q+2}{p+2}\int x^{p+2}\,\partial x\,(1-x)^{q-1}$$

$$\int x^{p+2}\partial x\,(1-x)^{q-1} = \frac{p+q+3}{p+3}\int x^{p+3}\,\partial x\,(1-x)^{q-1}$$

et ainsi de suite. D'où il suit que si nous concevons ces réductions continuées jusqu'à l'infini et que dans chacune nous substituons à la formule intégrale sa valeur que donne la suivante, nous aurons :

$$\int x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} = \frac{p+q}{p}\cdot\frac{p+q+1}{p+1}\cdot\frac{p+q+2}{p+2}\ldots\int x^{p+\infty}\,\partial x(1-x)^{q-1}.$$

§. 7. Mettant dans cette expression $p=1$, elle deviendra

$$\int\partial x\,(1-x)^{q-1} = \frac{q+1}{1}\cdot\frac{q+2}{2}\cdot\frac{q+3}{3}\ldots\int x^{1+\infty}\,\partial x\,(1-x)^{q-1}.$$

Or $\int\partial x\,(1-x)^{q-1} = C - \frac{(1-x)^q}{q}$, où la constante doit être déterminée de manière que l'intégrale s'évanouisse en mettant $x=0$, ce qui étant fait on aura

$$\int\partial x\;(1-x)^{q-1} = \frac{1}{q} - \frac{(1-x)^q}{q}.$$

En faisant maintenant $x=1$, on obtiendra pour les termes d'intégration établis :

$$\int\partial x\;(1-x)^{q-1}\left[\begin{smallmatrix}\text{de } x=0\\ \text{à } x=0\end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{q},$$

de sorte que

$$\frac{1}{q} = \frac{q+1}{1}\cdot\frac{q+2}{2}\cdot\frac{q+4}{3}\ldots\ldots\int x^{1+\infty}\,\partial x\,(1-x)^{q-1}.$$

§. 8. Divisons maintenant l'expression trouvée à la fin du §. 6. par celle-ci et nous aurons

$$q\int x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1}=\frac{1(p+q)}{p(q+1)}\cdot\frac{2(p+q+2)}{(p+1)(q+2)}\cdot\frac{3(p+q+2)}{(p+2)(q+3)}\cdots$$
$$\cdots\cdots\frac{\int x^{p+\infty}\partial x(1-x)^{q-1}}{\int x^{1+\infty}\partial x(1-x)^{q-1}}.$$

Or nous avons fait voir plus haut (§. 5.) que si l'exposant de x devient infini dans les deux formules, leur rapport devient celui de l'égalité. Ainsi le dernier facteur de notre produit infini devient égal à l'unité, de sorte que nous aurons:

$$\int x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1}=\frac{1}{q}\cdot\frac{1(p+q)}{p(q+1)}\cdot\frac{2(p+q+1)}{(p+1)(q+2)}\cdot\frac{3(p+q+2)}{(p+2)(q+3)}\cdot\text{ etc.}$$

§. 9. Je dois observer ici en passant que dans le produit que je viens de trouver on peut changer entr'elles les lettres p et q, sans que la formule intégrale subisse le moindre changement. Pour le démontrer je fais $x=1-z$ et à cause de $\partial x=-\partial z$, la formule intégrale devient: $-\int z^{q-1}\partial z(1-z)^{p-1}$ laquelle, prise depuis $z=1$ jusqu'à $z=0$, en changeant les termes de l'intégration, devient positive et égale au produit infini:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{1(p+q)}{(p+1)q}\cdot\frac{2(p+q+1)}{(p+2)(q+1)}\cdot\frac{3(p+q+2)}{(p+3)(q+2)}\cdot\text{ etc.}$$

Or nous avons vu que

$$\int z^{q-1}\partial z(1-z)^{p-1}\left[\begin{smallmatrix}\text{de } z=0\\ \text{à } z=1\end{smallmatrix}\right]=\int x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[\begin{smallmatrix}\text{de } x=0\\ \text{à } x=1\end{smallmatrix}\right]$$

par conséquent nous aurons aussi

$$\int x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1(p+q)}{(p+1)q}\cdot\frac{2(p+q+1)}{(p+2)(q+1)}\cdot\frac{3(p+q+2)}{(p+3)(q+2)}\cdot\text{ etc.}$$

où il est bon de remarquer que chaque terme de ce produit infini nait du précédent, si l'on ajoute l'unité à chacun des facteurs qui en composent le numérateur et le dénominateur, en exceptant le premier terme $\frac{1}{p}$ qui est isolé.

§. 10. Aprésent, à l'aide de cette transformation générale nous serons en état d'exprimer par un produit infini chacune des formules intégrales proposées et rapportées au §. 1. Mais pour rendre plus commode l'application de la formule intégrale géné-

rale aux formules spécielles proposées, nous mettrons dans celles-ci $n = m - 1$, ce qui étant fait, les valeurs de p, q, et $p + q$ seront pour les formules proposées comme la table suivante les représente:

Form:	I	II	III	IV	V
p	α	β	γ	δ	ε
q	$m-\alpha$	$m-\alpha-\beta$	$m-\alpha-\beta-\gamma$	$m-\alpha-\beta-\gamma-\delta$	$m-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon$
$p+q$	m	$m-\alpha$	$m-\alpha-\beta$	$m-\alpha-\beta-\gamma$	$m-\alpha-\beta-\gamma-\delta$

§. 11. Tout étant ainsi préparé pour pouvoir entamer notre objet principal, qui est d'examiner le produit des intégrales proposées, dont la valeur de chacune est exprimée par un produit infini, nous allons considérer successivement le produit des premiers, des seconds, des troisièmes etc. membres de nos produits spéciels, et d'abord la table précédente nous fait voir que le premier facteur solitaire $\frac{1}{p}$ sera pour la première de nos formules intégrales $= \frac{1}{\alpha}$, pour la seconde $= \frac{1}{\beta}$, pour la troisième $= \frac{1}{\gamma}$, et ainsi de suite. Le produit de tous ces facteurs isolés sera donc $= \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \text{ etc.}}$, et il est évident que cette valeur ne subira aucun changement, de quelque manière qu'on changera entr'elles les lettres α, β, γ, δ, etc.

§. 12. Examinons de la même manière les seconds membres de nos produits spéciels, compris dans la forme générale $\frac{1(p+q)}{(p+1)q}$, laquelle, en substituant successivement les valeurs de la table du §. 10., deviendra pour la formule intégrale

I. - - - $\frac{1 \cdot m}{(\alpha+1)(m-\alpha)}$

II. - - - $\frac{1 \cdot (m-\alpha)}{(\beta+1)(m-\alpha-\beta)}$

III. - - - $\frac{1 \cdot (m-\alpha-\beta)}{(\gamma+1)(m-\alpha-\beta-\gamma)}$

IV. - - - $\frac{1 \cdot (m-\alpha-\beta-\gamma)}{(\delta+1)(m-\alpha-\beta-\gamma-\delta)}$

etc. etc.

Le produit de ces seconds membres de nos produits spéciels donnera le second membre du produit cherché de nos intégrales, et il sera :

$$\frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{\beta+1} \cdot \frac{1}{\gamma+1} \cdot \frac{1}{\delta+1} \text{ etc.} \times \frac{m}{m-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.}}$$

qui ne subira non plus aucun changement, de quelque manière qu'on permutera les lettres α, β, γ, δ, etc.

§. 13. En examinant l'expression générale trouvée au §. 9. nous avons vu que chaque membre du produit donne le suivant en ajoutant l'unité à chacun de ses facteurs. Si nous faisons cela au second membre trouvé ci-dessus (§. 12.) nous aurons le troisième membre du produit cherhé :

$$\frac{2}{\alpha+2} \cdot \frac{2}{\beta+2} \cdot \frac{2}{\gamma+2} \cdot \frac{2}{\delta+2} \cdot \text{etc.} \times \frac{m+1}{m+1-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.}}$$

En faisant la même opération ici nous obtiendrons le quatrième membre du produit cherché :

$$\frac{3}{\alpha+3} \cdot \frac{3}{\beta+3} \cdot \frac{3}{\gamma+3} \cdot \frac{3}{\delta+3} \text{ etc.} \times \frac{m+2}{m+2-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.}}$$

De la même manière se trouvera le cinquième =

$$\frac{4}{\alpha+4} \cdot \frac{4}{\beta+4} \cdot \frac{4}{\gamma+4} \cdot \frac{4}{\delta+4} \cdot \text{etc.} \times \frac{m+3}{m+3-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.}}$$

et tous ces membres ne subissent aucun changement, de quelque manière qu'on change entr'elles les lettres α, β, γ, δ, ε, etc.

§. 14. Ainsi donc parceque les permutations de ces lettres ne changent point les valeurs des membres du produit cherché, il est clair que le produit des intégrales rapportées au §. 1., prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, ne change point de valeur quelques permutations qu'on fasse subir aux lettres α, β, γ, etc.

C. Q. F. D.

VIII.

DE CURVIS ALGEBRAICIS

QUORUM SINGULI ARCUS ARCUBUS CIRCULARIBUS AEQUANTUR.

Conventui exhibita die 20. Aug. 1823.

§. 1. Ad hujusmodi curvas perduxit me solutio sequentis problematis ex methodo quam vocant tangentium inversam, qua scilicet, data curvae proprietate quacunque, ipsa curva quaeritur. Problema autem ita se habet: *Invenire curvam AZ ad punctum*
Fig. 10. *fixum O relatam, ex quo si in tangentem ZT demittatur perpendiculum OT, positis* $OZ = z$ *et* $OT = p$, *sit* $p = az - zz$, quod noveram esse proprietatem harum curvarum. An quoque aliis competat videamus.

§. 2. Ad hoc problema solvendum pono angulum $AOZ = \Phi$ et arcum $AZ = s$, et cum sit $OZ = z$ et pro puncto proximo curvae $Zz = \partial s$, $zv = \partial z$ et $Zz = z\partial\Phi$ ob triangula Zvz et OTZ similia erit $Zz : Zv = OZ : OT$, hoc est $\partial s : z\partial\Phi = z : p$, unde fit $p = \frac{zz\partial\Phi}{\partial s}$. Ex conditione problematis autem est $p = z(a - z)$, unde sequitur haec aequatio:

$$z\partial\Phi = (a - z)\,\partial s.$$

Cum autem quadratum elementi arcus sit

$$\partial s^2 = \partial z^2 + zz\partial\Phi^2 = \partial z^2 + (a - z)^2\,\partial s^2$$

habebimus elementum arcus

$$\partial s = \frac{\partial z}{\sqrt{1 - (a - z)^2}}$$

ideoque ipsum arcum

$$s = \text{Arc. cos}\,(a - z)$$

unde sequitur fore $a - z = \cos. s$, ideoque $z = a - \cos. s$. Expressio autem modo inventa pro arcu indefinito, declarat omnse nostrae curvae arcus aequari arcui circulari.

§. 3. Nunc ad hanc curvam accuratius cognoscendam quaeramus $\partial\Phi$, et cum sit

$$\partial\Phi = \frac{(a - z)\,\partial s}{z}$$

substituto valore pro ∂s invento erit

$$\partial\Phi = \frac{(a - z)\,\partial z}{z\sqrt{1 - (a - z)^2}}$$

quod si ita integrari possit, ut angulus Φ quoque per arcus circulares exprimi queat, curva erit algebraica.

§. 4. Resolvatur formula integranda in partes, ponaturque

$$\Phi = \int \frac{a\,\partial z}{z\sqrt{1 - (a - z)^2}} - \int \frac{\partial z}{\sqrt{1 - (a - z)^2}}$$

atque evidens est fore

$$\Phi = \int \frac{a\,\partial z}{z\sqrt{1 - (a - z)^2}} - \int \partial s$$

unde sequitur fore

$$\Phi + s = \int \frac{a\,\partial z}{z\sqrt{1 - (a - z)^2}}$$

quae formula ut ab irrationalitate liberetur, ponamus

$$\sqrt{(1 + a - z)(1 - a + z)} = (1 + a - z)\,t$$

tum autem erit

$$z = \frac{a - 1 + (a + 1)\,tt}{1 + tt},$$

$$1 + a - z = \frac{2}{1 + tt},$$

$$1 - a + z = \frac{2tt}{1 + tt},$$

unde sequitur fore

$$\sqrt{1 - (a - z)^2} = \frac{2t}{1 + tt}.$$

Tum vero habebimus

$$\partial z = \frac{4t\partial t}{(1+tt)^2}$$

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{4t\partial t}{(1+tt)(a-1+(a+1)tt)}$$

$$\Phi + s = \int \frac{2a\partial t}{a-1+(a+1)tt}$$

unde actu integrando prodit

$$\Phi + s = \frac{2a}{\sqrt{aa-1}} \text{ Arc. tg } t\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$$

ita ut, si ponamus $\text{A. tg. } t\sqrt{\frac{a+1}{a-1}} = \theta$, perventi simus ad hanc aequationem

$$\Phi + s = \frac{2a}{\sqrt{aa-1}}\,\theta.$$

§. 5. Hinc intelligitur, quoties fuerit $\frac{2a}{\sqrt{aa-1}}$ numerus rationalis, curvam nostram fore algebraieam. Sit enim $\frac{2a}{\sqrt{aa-1}} = n$, erit $\Phi = n\theta - s$, unde tam $\sin\Phi$ quam $\cos\Phi$ algebraice exprimi poterunt, ideoque etiam aequatio inter coordinatas orthogonales

$$\text{OX} = x = z\cos\Phi \text{ et } \text{XZ} = x = z\sin\Phi,$$

erit algebraica.

§. 6. Tractemus nunc problema inversum et *quaeramus curvas algebraicas ad punctum fixum O relatas, quarum arcus per arcus circulares exprimantur*. Hunc in finem, servatis denominationibus jam supra adhibitis, constet fore in genere:

$$\partial s^2 = \partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2.$$

§. 7. Jam quoniam requiritur ut arcus s aeque ac angulus Φ per arcus circulares exprimantur, ponamus

$$\partial s = \frac{c\partial t}{1+tt}$$

$$\partial\Phi = \frac{f\partial t}{1+tt} + \frac{g\partial t}{a+bt+tt}.$$

quae ambae partes sunt circulares, eritque, fractionibus ad communem denominatorem reductis:

$$\partial\Phi = \frac{(af + g + bft + (f + g)\,tt)\,\partial t}{(1 + tt)(a + bt + tt)}.$$

§. 8. Sumatur nunc

$$z = \frac{a + bt + tt}{1 + tt}$$

atque habebimus

$$\frac{z\,\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\alpha + \beta t + \gamma tt}{(1 + tt)2}$$

posito brevitatis gratia

$$\alpha = af + g,$$
$$\beta = bf,$$
$$\gamma = f + g.$$

Tum vero erit

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{b + 2(1 - a)\,t - btt}{(1 + tt)^2}$$

existente (§. 7.)

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{c}{1 + tt}.$$

§. 9. Quodsi nunc valores §. 8. traditos in aequatione §. 6.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{z\,\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = 0$$

substituamus, prodibit sequens aequatio determinationi litterarum α, β, γ, inserviens:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \\
+bb & +4b(1-a)t & -2bbt^2 & -4b(1-a)t^3 & +bbt^4 \\
+\alpha\alpha & +2\alpha\beta t & +4(1-a)^2t^2 & +2\beta\gamma t^3 & +\gamma\gamma t^4 \\
-cc & & +2\alpha\gamma t^2 & & -cct^4 \\
 & & +\beta\beta t^2 & & \\
 & & -2cct^2 & &
\end{array}\right\} = 0$$

cujus igitur singula membra seorsim ad nihilum redigi oportet, unde sequitur fore

Ex I. $cc = bb + \alpha\alpha$.
Ex V. $cc = bb + \gamma\gamma$.
Hinc $\gamma\gamma = \alpha\alpha$
et $\gamma = \pm \alpha$.
Ex II. $\alpha\beta = -2b(1-a)$:
Ex IV. $\beta\gamma = +2b(1-a)$.

Hinc, si $\gamma = -\alpha$,
erit $\beta = -\frac{2b(1-a)}{\alpha}$.
Ex III. $4(1-a)^2 - 4bb - 4\alpha\alpha + \frac{4bb(1-a)^2}{\alpha\alpha} = 0$.

Hinc $(1-a)^2 = \alpha\alpha$.

Habebimus igitur

$$\alpha = a - 1, \ \beta = 2b, \ \gamma = 1 - a.$$

§. 10. Quo nunc etiam valores litterarum f et g obtineamus notandum est, ob $\gamma = -\alpha$, sive ob $\alpha + \gamma = 0$, fore $(a+1)f + 2g = 0$, unde fit $g = -\frac{1}{2}f(a+1)$. Tum vero, quoniam $\gamma - \alpha = -2\alpha$, erit $(1-a)f = -2\alpha = 2(1-a)$, ideoque $f = 2$, hincque $g = -a - 1$.

§. 11. Cum igitur hoc modo omnes litteras α, β, γ, f et g determinaverimus, litterae vero a et b manserint indeterminatae, ob

$$c = \sqrt{bb + \gamma\gamma} = \sqrt{bb + (1-a)^2}$$

habebimus

$$\partial s = \frac{\partial t\sqrt{bb + (1-a)^2}}{1+tt}$$

$$z = \frac{a + bt + tt}{1+tt}$$

$$\partial\Phi = \frac{2\partial t}{1+tt} - \frac{(a+1)\partial t}{a + bt + tt}$$

unde omnia curvae elementa sequenti modo per t definientur:

$$s = \sqrt{bb + (1 - a)^2} . \text{Arc. tg. } t$$
$$z = \frac{a + bt + tt}{1 + tt}$$
$$\Phi = 2 \text{ A. tg. } t - \frac{2(a+1)}{\sqrt{4a - bb}} \times \text{A. tg} \frac{t\sqrt{4a - bb}}{2a + bt}$$

Curva igitur erit algebraica, quoties $\frac{2(a+1)}{\sqrt{4a-bb}}$ est numerus rationalis.

§. 12. Haec quidem solutio generalior esse videtur praecedente, re vera autem cum illa perfecte est consentanea. Ad quod ostendendum quaeratur perpendiculum in tangentem $OT = p$, quod cum in genere sit $p = \frac{zz \partial \Phi}{\partial s}$ (§. 2.), ex nostris formulis erit

$$\left. \begin{aligned} \partial \Phi &= \frac{2\partial t}{1 + tt} - \frac{(a+1)\partial t}{a + bt + tt} \\ a + bt + ctt &= z(1 + tt) \end{aligned} \right\} \text{(§. 11.)}$$
$$\frac{\partial t}{1 + tt} = \frac{\partial s}{c} \text{ (§. 7.)}$$

unde binis postremis in prima substitutis habebimus

$$\partial \Phi = \frac{2\partial s}{c} - \frac{(a+1)\partial s}{cz}$$

hincque sequitur fore

$$\frac{zz\partial \Phi}{\partial s} = \frac{2zz}{c} - \frac{(a+1)z}{c}$$

unde sumto $c = -2$ prodibit

$$p = \left(\frac{a+1}{2}\right) z - zz = a'z - zz$$

ut in prima solutione assumsimus.

IX.

INTEGRATIO

AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM:

$$y\partial x - x\partial y = a\sqrt[n]{\partial x^n + \partial y^n}$$

&

$$xy(\partial x^2 - \partial y^2) - \partial x\partial y(xx - yy + aa) = 0.$$

Conventui exhibita die 2. Mart. 1825.

§. 1. Huic aequationi tractandae ansam praebuere integrationes aequationum

$$y\partial x - x\partial y = a\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$
$$y\partial x - x\partial y = a\sqrt[3]{\partial x^3 + \partial y^3}$$

quarum priorem Eulerus in Calculi Integralis Tomo 1. pag. 459, alteram pag. 462. integratas dedit, neque vero illam in titulo expositam, generaliorem, aggressus est, in qua binae modo memoratae aequationes, tanquam casus speciales, sunt contentae. Cum igitur ipse Eulerus hos casus specialiores tractatu satis difficiles declarat, si operationes more consueto instituantur, solutionem aequationis illius latius patentis, quam mihi integrandam proposui, heic exhibere eo minus dubito, quod integrale ejus, quantum quidem mihi innotuit, a nemine adhuc prolatum fuerit in medium.

§. 2. Statuatur igitur in aequatione proposita $\partial y = p\partial x$, eaque induet hanc formam:

$$y - px = a\sqrt[n]{1 + p^n}.$$

Differentietur haec aequatio, et ob $\partial y = p\partial x$ fiet

$$x\partial p = - ap^{n-1}\partial p(1 + p^n)^{\frac{1-n}{n}}$$

cujus aequationis unus factor $\partial p = 0$ dat $p = b$, unde hanc nanciscimur aequationem integralem

$$y - bx = a\sqrt[n]{1 + b^n}$$

ita ut habeamus ex factore ∂p

$$y = bx + a\sqrt[n]{1 + b^n}.$$

§. 3 Consideretur nunc alter factor

$$x = - ap^{n-1}(1 + p^n)^{\frac{1-n}{n}}$$

et cum sit

$$y = px + a\sqrt[n]{1 + p^n},$$

illo valore x hic substituto, erit

$$y = - ap^n(1 + p^n)^{\frac{1-n}{n}} + a\sqrt[n]{1 + p^n}$$

quae expressio, facta reductione debita, in hanc abit

$$y = a(1 + p^n)^{\frac{1-n}{n}}.$$

§. 4. Jam cum invenerimus pro altera variabili x valorem:

$$x = - ap^{n-1}(1 + p^n)^{\frac{1-n}{n}}$$

manifestum est fore

$$\frac{x}{y} = - p^{n-1}$$

ex ut habeamus

$$p = (- \frac{x}{y})^{\frac{1}{n-1}}$$

ita quo nanciscimur

$$1 + p^n = 1 + (- \frac{x}{y})^{\frac{n}{n-1}}.$$

§. 5. Ex valore autem supra (§. 4.) pro y invento sequitur fore

$$\frac{y}{a} = (1 + p^n)^{\frac{1-n}{n}}.$$

sive, quod eodem redit

$$\frac{a}{y} = (1 + p^n)^{\frac{n-1}{n}}$$

ita ut, si loco $1 + p^n$ valor supra (§. 4.) inventus substituatur, habeamus hanc aequationem inter variabiles x et y:

$$\frac{a}{y} = (1 + (-\frac{x}{y})^{\frac{n}{n-1}})^{\frac{n-1}{n}}$$

quam ita repraesentemus:

$$(\frac{a}{y})^{\frac{n}{n-1}} = 1 + (-\frac{x}{y})^{\frac{n}{n-1}}$$

quae fractionibus sublatis, sive ducta in $y^{\frac{n}{n-1}}$ abit in hanc:

$$a^{\frac{n}{n-1}} = y^{\frac{n}{n-1}} + (-x)^{\frac{n}{n-1}}.$$

§. 6. Quod si nunc loco x scribamus $-z$, aequationis differentialis hujus:

$$z\partial y - y\partial z = a\sqrt[n]{\partial y^n + \partial z^n}$$

integrale alterum erit

$$a^{\frac{n}{n-1}} = y^{\frac{n}{n-1}} + z^{\frac{n}{n-1}},$$

alterum vero

$$y = a\sqrt[n]{1 + b^n} - bz,$$

ex quibus integrale completum aequationis differentialis componitur.

§. 7. Sit $n = 2$ et aequationis

$$z\partial y - y\partial z = a\sqrt{\partial y^2 + \partial z^2}$$

unum integrale erit

$$y = a\sqrt{1 + bb} - bz$$

alterum vero

$$y = \sqrt{aa - zz}$$

quae ambo, restituto loco z valore $-x$ cum solutione Euleri (Calc. integr. T. I. pag. 459.) perfecte congruunt.

§. 8. Sumatur nunc $n = 3$ et aequationis

$$z\partial y - y\partial z = a\sqrt[3]{\partial y^3 + \partial z^3}$$

alterum integrale erit

$$y = a\sqrt[3]{1 + b^3} - bz$$

alterum vero

$$y = \sqrt[3]{(a\sqrt{a} - z\sqrt{z})^2}$$

quae cum solutione Euleri (Calc. int. T. I. p. 462.) congruunt.

Additamentum de aequatione differentiali
$xy(\partial x^2 - \partial y^2) - \partial x \partial y (xx - yy + aa) = 0.$

§. 9. Cum haec aequatio, aeque ac in superioribus paragraphis tractatae, ad eundem ordinem pertinet aequationum differentialium, in quo differentialia ad plures dimensiones assurgunt et cujus integratio, si methodus consueta adhibeatur, variis difficultatibus obvoluta deprehenditur, viam, quam ingressus sum, ad eam resolvendam, haud abs re erit heic quoque breviter exposuisse.

§. 10. Primum observasse juvabit aequationem heic propositam etiam hoc modo repraesentari posse:

$$(y\partial x - x\partial y)(x\partial x + y\partial y) = aa\partial x\partial y$$

unde statim intelligitur pro casù quo $a = 0$ oriri duas solutiones, alteram ex aequatione $y\partial x - x\partial y = 0$ quae dat $\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial x}{x}$, ergo $ly = la + lx$, ideoque $y = ax$ pro linea recta; alteram vero solutionem oriri ex factore $x\partial x + y\partial y = 0$, ex quo fit $xx + yy = \beta\beta$, pro circulo.

§. 11. Hinc autem intelligitur in genere, quicquid fuerit aa solutionem aequationis ita comparatam esse debere, ut, sumto $a = 0$ tam linea recta quam circulus prodeant ex solutione generali.

§. 12. His praeviis observationibus, viam sternentibus, praemissis, aggrediamur solutionem aequationis propositae, ponendo $\partial y = p\partial x$, quo facto ea induet hanc formam:

$$(y - px)(x + py) = aap$$

ex qua autem neque x, neque y, neque p commode determinare licet.

§. 13. Difficultas ista e medio tolletur, si statuatur $y = ux$, quo facto aequatio fiet

$$(u - p)(1 + pu)\, xx = aap.$$

Hinc sumtis differentialibus logarithmicis prodibit

$$\frac{\partial u - \partial p}{u - p} + \frac{p\partial u + u\partial p}{1 + pu} + \frac{2\partial x}{x} = \frac{\partial p}{p}.$$

§. 14. Cum autem sit

$$\partial y = u\partial x + x\partial u = p\partial x$$

habebimus pro $\frac{\partial x}{x}$ hunc valorem:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$$

quo in praecedente aequatione substituto emerget ista:

$$\frac{\partial p + \partial u}{p - u} + \frac{pp\partial u - \partial p}{p(1 + pu)} = 0$$

quae in hanc abit

$$(p\partial u + u\partial p)(1 + pp) = 0.$$

§. 15. Hujus aequationis factor posterior, ob $p = \sqrt{-1}$, dat nullam solutionem; alter vero factor $p\partial u + u\partial p = 0$ dat

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{\partial u}{u}$$

unde integrando elicitur

$$lp = lc - lu \text{ et } p = \frac{c}{u}.$$

§. 16. Cum igitur invenerimus (§. 14.)

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$$

si loco p valor modo inventus hic substituatur, fiet

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{u \partial u}{c - uu}$$

sumtisque integralibus erit

$$lx = lb - l\sqrt{c - uu}$$

ita ut habeamus

$$x = \frac{b}{\sqrt{c - uu}}$$

$$y = ux = \frac{bu}{\sqrt{c - uu}}$$

pro solutione completa nostrae aequationis differentialis.

§. 17. In hanc quidem solutionem ingressae sunt duae constantes arbitrariae, b et c; verum postrema c per priorem b et per constantem datam a aequationis propositae determinabitur. Constans enim c ita est definienda ut fiat

$$xx\,(u - p)\,(1 + pu) = aap.$$

Hoc autem praestabitur, si in hac aequatione loco y et p valores inventi substituantur, quo facto fiet:

$$\frac{bb}{c - uu}\left(u - \frac{c}{u}\right)(1 + c) = \frac{aac}{u}$$

quae aequatio a fractionibus liberata ita se habebit:

$$bb\,(uu - c)\,(1 + c) = aac\,(c - uu)$$

unde concluditur fore

$$c = -\frac{bb}{aa + bb}.$$

§. 18. Quodsi igitur quaeratur linea curva, cujus si resecta ducatur in summam, vel differentiam, abscissae et subnormalis, productum ubique eundem obtineat valorem, solutio in promtu est. Erunt enim curvae coordinatae $x = \frac{b}{\sqrt{c - uu}}$ et $y = \frac{bu}{\sqrt{c - uu}}$, unde curva construi poterit.

§. 19. Cum igitur sit $x = \frac{b}{\sqrt{c - un}}$ et $u = \frac{y}{x}$, erit

$$x = \frac{bx}{\sqrt{cxx - yy}} \quad \text{sive} \quad 1 = \frac{b}{\sqrt{cxx - yy}}$$

ideoque $cxx - yy = bb$, quae aequatio indicat sectionem conicam centrum in initio abscissarum habentem.

§. 20. Videamus nunc utrum solutio nostra generalis aequationis differentialis propositae revera ita sit comparata, ut sumto in ea valore $a = 0$ prodeant ex ea linea recta et circulus, quemadmodum in §. 11. postulabatur. Hunc in finem revertamur ad aequationem §. 17. inventam

$$bb\,(1 + c) = - aac$$

et sumto $a = 0$ evidens est fieri quoque debere $b = 0$, ideoque aequatio §. 19. inventa $cxx - yy = bb$, nunc fiet $cxx - yy = 0$, unde fit $y = x\sqrt{c}$ pro lineis rectis ex initio abscissarum A eductis, in quibus igitur resecta nulla. Tum vero quoniam, sumto $a = 0$, et $c = - 1$, aequationi $bb\,(1 + c) = - aac$ quoque satisfit, ex eadem sequitur $bb = \frac{0}{0} = \beta\beta$, ex aequatione §. 19: $cxx - yy = \beta\beta$ vero concluditur fore $yy = \beta\beta - xx$, pro circulo centrum in initio abscissarum habente, pro quo nempe differentia abscissam inter et subnormalem in nihilum abit.

X.

DE

INTEGRATIONE AEQUATIONIS DIFFERENTIALIS

$$v\partial v + v(3y + f)\partial y + (y^3 + fy^2 + gy + h)\partial y = 0.$$

Conventui exhibita die 23. Aug. 1826.

§. 1. De hujus aequationis differentialis integratione primus, ni fallor, disseruit summus quondam Eulerus in Tomo XVII Novorum Academiae Commentariorum, ubi imprimis docuit, quomodo investigari debeant multiplicatores, seu divisores, quorum ope aequatio illa integrabilis evadat, ipsum autem ejus integrale tantum indicavit et quidem sub forma non admodum commoda, aequatione scilicet finita algebraica, in qua vero ambae variabiles adhuc valde sunt permixtae.

§. 2. Cupiebam scire, an non integrale aequationis differentialis propositae duas variabiles complectentis ita adornari possit, ut utraque variabilis algebraice per novam, tertiam, exhiberi queat, vel ut variabiles ita adeo separari patiantur, ut una per alteram prodeat expressa. Hunc in finem ipsam integrationem adgressus sum duplici modo, et quasnam adeptus sim integralium formas heic, una cum methodis adhibitis breviter exhibebo.

Methodus prior.

§. 3. Consideretur aequatio differentialis tertii gradus haec:

$$\partial^3 z + f\partial\partial z\partial t + g\partial z\partial t^2 + hz\partial t^3 = 0$$

in qua ∂t ut constans spectetur. Statuatur autem

$$z = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} + Ce^{\gamma t}$$

atque cum sit

$$\partial^3 z = \partial t^3 \,(A\alpha^3 e^{\alpha t} + B\beta^3 e^{\beta t} + C\gamma^3 e^{\gamma t})$$
$$f\partial^2 z\partial t = f\partial t^3 \,(A\alpha^2 e^{\alpha t} + B\beta^2 e^{\beta t} + C\gamma^2 e^{\gamma t})$$
$$g\partial z\partial t^2 = g\partial t^3 \,(A\alpha\, e^{\alpha t} + B\beta\, e^{\beta t} + C\gamma\, e^{\gamma t})$$
$$h\, z\partial t^3 = h\partial t^3 \,(A\, e^{\alpha t} + B\, e^{\beta t} + C\, e^{\gamma t})$$

manifestum est fieri debere:

$$\left.\begin{array}{l} A\alpha^3 e^{\alpha t} + B\beta^3 e^{\beta t} + C\gamma^3 e^{\gamma t} \\ + f\,(A\alpha^2 e^{\alpha t} + B\beta^2 e^{\beta t} + C\gamma^2 e^{\gamma t} \\ + g\,(A\alpha\, e^{\alpha t} + B\beta\, e^{\beta t} + C\gamma\, e^{\gamma t} \\ + h\,(A\, e^{\alpha t} + B\, e^{\beta t} + C\, e^{\gamma t} \end{array}\right\} = 0$$

hoc est fieri debere:

$$\alpha^3 + f\alpha^2 + g\alpha + h = 0$$
$$\beta^3 + f\beta^2 + g\beta + h = 0$$
$$\gamma^3 + f\gamma^2 + g\gamma + h = 0$$

Hinc autem sequitur valorem

$$z = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} + Ce^{\gamma t}$$

fore integrale completum aequationis illius tertii gradus:

$$\partial^3 z + f\partial^2 z\partial t + g\partial z\partial t^2 + hz\partial t^3 = 0,$$

siquidem α, β, γ, fuerint radices aequationis cubicae

$$\lambda^3 + f\lambda^2 + g\lambda + h = 0.$$

Istud integrale ceterum etiam a priori invenire licet, quae autem investigatio scopo nostro est aliena.

§. 4. Transformemus nunc aequationem illam differentialem tertii gradus in aliam primi gradus quod fiet ponendo

$$\partial z = p\partial t \quad \text{et} \quad \partial p = q\partial t$$

ita ut habeamus

$$\partial^2 z = \partial p\partial t = q\partial t^2$$
$$\partial^3 z = \partial q\partial t^2$$

quibus in aequatione tertii gradus substitutis, ea transfunditur in sequentem primi gradus:

$$\partial q + f\partial p + gp\partial t + hz\partial t = 0$$

ubi notandum est ob $p = \frac{\partial z}{\partial t}$ fore

$$p = A\alpha e^{\alpha t} + B\beta e^{\beta t} + C\gamma e^{\gamma t}.$$

§. 5. Quoniam autem in aequatione modo tradita insunt tres variabiles p, q, z, una cum elemento constanté ∂t, adhuc aliis transformationibus opus est, ut obtineamus aequationem duas tantum variabiles involventem. Hunc in primo, ob

$$\partial z = p\partial t \text{ et } q = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p\partial p}{\partial z}$$

ideoque

$$\partial q = \frac{p\partial\partial p + \partial p^2}{\partial z},$$

scribamus hos valores, quo facto aequatio hanc induet formam:

$$\frac{p\partial\partial p + \partial p^2}{\partial z} + f\partial p + g\partial z + \frac{hz\partial z}{p} = 0.$$

Tum vero ponamus $p = yz$ et $\partial p = x\partial z = y\partial z + z\partial y$, ita ut sit $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial y}{x - y}$ et aequatio modo tradita abibit in hanc:

$$yz\partial x + xx\partial z + fx\partial z + g\partial z + \frac{h\partial z}{y} = 0$$

ex qua porro concluditur fore:

$$\frac{\partial z}{z} = - \frac{y\partial x}{xx + fx + g + \frac{h}{y}} = \frac{\partial y}{x - y},$$

ita ut nunc adepti simus hanc aequationem duas tantum variabiles complectentem:

$$y^2(x - y)\partial x + (x^2y + fxy + gy + h)\partial y = 0$$

§. 6. Hujus jam aequationis integrale completum in promtu habemus. Cum enim sit $y = \frac{p}{z}$ et $x = \frac{\partial p}{\partial z}$ (§. 5.), nec non

$$p = A\alpha e^{\alpha t} + B\beta e^{\beta t} + C\gamma e^{\gamma t} \quad (\text{§. 4.})$$
$$z = A\ e^{\alpha t} + B\ e^{\beta t} + C\ e^{\gamma t} \quad (\text{§. 3.})$$

ambae ejus variabiles x et y sequenti modo per tertiam variabilem t sequenti modo determinabuntur:

$$x = \frac{\alpha^2 Ae^{\alpha t} + \beta^2 Be^{\beta t} + \gamma^2 Ce^{\gamma t}}{\alpha Ae^{\alpha t} + \beta Be^{\beta t} + \gamma Ce^{\gamma t}};$$

$$y = \frac{\alpha Ae^{\alpha t} + \beta Be^{\beta t} + \gamma Ce^{\gamma t}}{Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} + Ce^{\gamma t}}.$$

§. 7. Quod si nunc denique statuamus $x = \frac{v}{y} + y$ et $e^t = u$, tum aequatio differentialis modo integrata hanc recipiet faciem:

$$v\partial v + v(3y + f)\partial y + (y^3 + fy^2 + gy + h)\partial y = 0,$$

quae igitur ea ipsa est, cujus integrale quaerimus. Cum autem sit ut §. 6. vidimus

$$y = \frac{\alpha Au^{\alpha} + \beta Bu^{\beta} + \gamma Cu^{\gamma}}{Au^{\alpha} + Bu^{\beta} + Cu^{\gamma}}$$

ob $v = xy - yy$ habebimus

$$v = \frac{(\alpha-\beta)^2 ABu^{\alpha+\beta} + (\alpha-\gamma)^2 ACu^{\alpha+\gamma} + (\beta-\gamma)^2 BCu^{\beta+\gamma}}{(Au^{\alpha} + Bu^{\beta} + Cu^{\gamma})^2}$$

ita ut ambae variabiles v et y per tertiam u sint expressae. Ubi adhuc tenendum est hoc integrale fore adeo algebraicum, quoties α, β, γ sunt numeri rationales.

Methodus altera, directa.

§. 8. Tentemus viam magis directam ad integrale nostrae aequationis propositae ducentem. Hunc infinem ponamus brevitatis gratia

$$M = 3y + f$$
$$N = y^3 + fy^2 + gy + h$$

ut aequatio resolvenda sit

$$v\partial v + Mv\partial y + N\partial y = 0$$

Tum vero statuatur $\partial v = p\partial y$ atque habebimus

$$v = -\frac{N}{p + M}$$
$$p\partial y = -\partial . \frac{N}{p + M}$$

Sit autem $p + M = q$ eritque $p\partial y = -\partial . \frac{N}{q}$. hoc est

$$q\partial y - M\partial y = -\frac{q\partial N + N\partial q}{qq}$$

Hinc posito $\partial N = N'\partial y$ emergit ista aequatio:

$$q\partial y - M\partial y = -\frac{N'\partial y}{q} + \frac{N\partial q}{qq}$$

quae transmutatur in hanc:

$$(q^3 - Mq^2 + qN')\,\partial y = N\partial q.$$

§. 9. Ad hanc aequationem separabilem reddendam ponamus $q = s + y$, ita ut $\partial q = \partial s + \partial y$, quibus valoribus substitutis, restitutisque loco M, N et

$$N' = \frac{\partial N}{\partial y} = 3y^2 + 2fy + g$$

suis valoribus, orietur aequatio

$$(s^3 - fs^2 + gs - h)\,\partial y = (y^3 + fy^2 + gy + g)\,\partial s$$

ita ut, separatione peracta, sit

$$\frac{\partial s}{s^3 - fs^2 + gs - h} = \frac{\partial y}{y^3 + fy^2 + gy + h}$$

quam igitur aequationem integrare licebit, sive ope idonei multiplicatoris (V. Euleri Instit. Calc. Integr. T. III. p. 500), sive subsidio resolutionis denominatorum in factores fractionumque ambarum in fractiones simplices (V. Actor. Acad. T. I. P. I. p. 91). Hoc enim modo s determinabitur per y et quidem generaliter, si post integrationem constans rite adjiciatur.

§. 10. Cum igitur $v = -\frac{N}{p + M}$, hoc est

$$v = -\frac{N}{q} = -\frac{N}{s + y},$$

habemus

$$v = -\frac{y^3 - fy^2 - gy - h}{s + y}$$

En igitur solutionem directam atque completam nostrae aequationis differentialis

$$v\partial v + v(3y + f)\,\partial y + (y^3 + fy^2 + gy + h)\,\partial y = 0$$

utpote cujus unam variabilem v per alteram y determinare nobis erat propositum.

Aequationis aliquanto generalioris

$$v\partial v + v(3ny + f)\partial y + (n^2y^3 + nfy^2 + gy + h)\partial y = 0$$

resolutio directa.

§. 11. Haec aequatio tractari potest methodo prorsus simili ejus, qua supra usi sumus. Statuatur enim, ut supra §. 8. fecimus:

$$M = 3ny + f$$
$$N = n^2y^3 + nfy^2 + gy + h$$

sitque $\partial v = p\partial y$ et aequatio hic resolvenda evadet

$$vp\partial y + Mv\partial y + N\partial y = 0$$

ex qua sequitur fore

$$v = -\frac{N}{p + M}$$

tum vero posito $p + M = q$ atque $\partial N = N'\partial y$, prosequendo eundem calculum, quem supra §. 8. instituimus, pervenimus ad hanc aequationem:

$$(q^3 - q^2M + qN')\partial y = N\partial q.$$

§. 12. Ponamus nunc $q = s + L$ et aequatio modo tradita hanc induet formam:

$$\left\{\begin{array}{l} s^3 + 3s^2L + 3sL^2 + L^3 \\ \quad - s^2M - 2sML - ML^2 \\ \qquad\quad + sN' + N'L \\ \qquad\qquad\quad - N\partial L \end{array}\right\}\partial y = N\partial s$$

quae, ut in oculos incurrit, separabilis fiet, si coëfficientes terminorum potestates s^2, s^1, s^0 involventium constantes induant valores. Quod si nunc statuatur

$$M - 3L = f;$$
$$3L - 2ML + N = g;$$
$$L^3 - ML^2 + N'L - N\partial L = k;$$

tum vero ponatur $L = ny$, erit

$$M = 3ny + f$$
$$N' = \frac{\partial N}{\partial y} = 3ny^2 + 2nfy + g$$

atque quoniam est

$$\begin{aligned} + \; L^3 &= + \; n^3y^3 \\ - ML^2 &= - 3n^3y^3 - fn^2y^2 \\ + N'L &= + 3n^3y^3 + 2fn^2y^2 + gny \\ - N\partial L &= - n^3y^3 - fn^2y^2 - gny - nh \end{aligned}$$

tertiae aequationi conditionali jam est satisfactum, cum sponte fiat quantitas constans

$$L^3 - ML^2 + N'L - N\partial L = k = - nh.$$

§. 13. Aequatio igitur initio paragraphi praecedentis allata nunc ita se habet:

$$(s^3 - fs^2 + gs - hn)\,\partial y = (n^2y^3 + nfy^2 + gy + h)\,\partial s$$

unde manifestum est s definiri posse per y ex aequatione

$$\frac{\partial s}{s^3 - fs^2 + gs - hn} = \frac{\partial y}{n^2y^3 + nfy^2 + gy + h}$$

et cum sit $v = - \frac{N}{q} = - \frac{N}{s + y}$, erit

$$v = - \frac{n^2y^3 - nfy^2 - gy - h}{s + y}$$

integrale completum aequationis differentialis propositae.

XI.

FORMULARUM QUARUNDAM

INTEGRALIUM DUPLICATARUM INTEGRATIO.

Conventui exhibita die 23. Aug. 1826.

§. 1. Formulas integrales duplicatas Eulerus eas appellavit, quae, duplici signo summatorio affectae, duplicem integrationem requirunt, in quarum priore binarum variabilium in formulam ingredientium sola una ut variabilis spectatur in posteriore vero altera. Hujusmodi formularum aliquot tractare earumque integralia, intra duplices terminos integrationis contenta, hic exhibere in animum induxi.

§. 2. Ad priora problemata hujus dissertationis solvenda ansam dedit consideratio solidi rotundi resolutione circa axem z geniti, cujus soliditas, cum sit $\int \pi vv \partial z$, posito $z = v^{2n}$ et integrali a $v = 0$ ad $v = 1$ extenso, erit $= \frac{\pi n}{n+1}$. Cum enim eadem expressio pro soliditate oriri debeat, quomodocunque coordinatae permutentur, hinc sequens problema proponi poterit:

Problema 1.

§. 3. *Si fuerit* $V = \int \partial x\, (xx + yy)^n \left[\begin{smallmatrix}\text{ab } x = 0\\ \text{ad } x = 1\end{smallmatrix}\right]$ *invenire integrale*

$$\int V \partial y \left[\begin{smallmatrix}\text{ab } y = 0\\ \text{ad } y = \sqrt{1 - xx}\end{smallmatrix}\right].$$

Solutio.

Hic scilicet pro soliditate sumitur formula $\int \partial x \int \partial y\, (1 - v^{2n})$ sive $\int \partial x \int \partial y\, (1 - (xx + yy)^n)$, unde pro parte priore habebimus

$$\int \partial x \int \partial y \left[\begin{smallmatrix}\text{ab } y = 0\\ \text{ad } y = \sqrt{1 - xx}\end{smallmatrix}\right] = \int \partial x \sqrt{1 - xx}.$$

Est vero $\int \partial x \sqrt{1 - xx} \left[\begin{smallmatrix}\text{ab } x = 0\\ \text{ad } x = 1\end{smallmatrix}\right] = \frac{\pi}{4}$, ideoque pars prior $\int \partial x \int \partial y = \frac{\pi}{4}$. Soliditas igitur erit

$$4 \left(\frac{\pi}{4} - \int \partial y . \int \partial x \, (xx + yy)^n\right)$$

sive restituto V erit ea

$$4 \left(\frac{\pi}{4} - \int \mathrm{V} \, \partial y\right)$$

quae cum debeat esse $= \frac{\pi n}{n+1}$ (§. 2.), habebimus

$$\int \mathrm{V} \partial y \left[\begin{smallmatrix}\text{ab } y = 0\\ \text{ad } y = \sqrt{1 - xx}\end{smallmatrix}\right] = \frac{\pi}{4(n+1)}.$$

Scholion.

§. 4. Haec integratio ideo notatu est digna, quod facta evolutione binomii $(xx + yy)^n$ prodeat series, quae ducta in ∂x et per partes integrata, casibus quibus exponens n est fractus, ad logarithmos perducit, cum tamen pro terminis integrationis supra stabilitis valor integralis $\int \mathrm{V} \partial y$ semper sit $= \frac{\pi}{4(n+1)}$, quemadmodum etiam sequens problema ostendet, cujus solutio a praecedente, quoad methodum penitus est diversa.

Problema 2.

§. 5. *Si fuerit* $\mathrm{V} = \int \partial y \, (xx + yy)^n \left[\begin{smallmatrix}\text{ab } y = 0\\ \text{ad } y = \sqrt{1 - xx}\end{smallmatrix}\right]$, *invenire integrale* $\int \mathrm{V} \partial x \left[\begin{smallmatrix}\text{ab } x = 0\\ \text{ad } x = 1\end{smallmatrix}\right]$.

Solutio.

Quoniam in priore integratione x est constans, ponatur $y = xu$, eritque $\partial y = x \partial u$ atque $xx + yy = xx(1 + uu)$, unde sequitur

$$V = x^{2n+1} \int \partial u\, (1 + uu)^n \begin{bmatrix} \text{ab } u = 0 \\ \text{ad } u = \frac{\sqrt{1-xx}}{x} \end{bmatrix}.$$

Hinc intelligitur statim poni posse $u = \frac{\sqrt{1-xx}}{x}$, unde fit

$$\partial u = \frac{-\partial x}{xx\sqrt{1-xx}} \quad \text{et} \quad 1 + uu = \frac{1}{xx},$$

quibus substitutis prodibit

$$V = -\, x^{2n+1} \int \frac{\partial x}{x^{2n+2}\sqrt{1-xx}}$$

quod integrale per hypothesin fit evanescens posito $u = 0$, vel $y = 1$.

Nunc igitur habebimns

$$\int V \partial x = -\int x^{2n+1} \partial x \int \frac{\partial x}{x^{2n+2}\sqrt{1-xx}}$$

unde per Lemma notissimum $\int P\partial Q = PQ - \int Q\partial P$ habebimus

$$\int V \partial x = -\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \int \frac{\partial x}{x^{2n+2}\sqrt{1-xx}} + \int \frac{\partial x}{(2n+2)\sqrt{1-xx}}$$

ubi prius membrum sponte evanescit casu $x = 0$. Posito autem $x = 1$ erit

$$\int V \partial x \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2n+2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4(n+1)}$$

ut supra invenimus.

Scholion.

§. 6. Cum saepissime intersit nosse varias methodos, quibus ad eandem veritatem pertingere licet, pluribus forte non displicebit, si binis superioribus solutionibus ejusdem problematis adjungamus tertiam ex alio fonte derivatam, ubi scilicet integratio per idoneum multiplicatorem perficitur. Hujusmodi igitur solutionem in sequenti problemate, jam duplici modo soluto, ob oculos ponam.

Problema 3.

§. 7. *Si fuerit* $V = \int \partial y\, (xx + yy)^n \left[\begin{smallmatrix}\text{ab } y = 0 \\ \text{ad } y = \sqrt{1 - xx}\end{smallmatrix}\right]$ *investigare integrale* $\int V \partial x \left[\begin{smallmatrix}\text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1\end{smallmatrix}\right]$.

Solutio.

Cum sit V certa functio binarum variabilium x et y, quaeramus ejus differentiale, si tam x quam y variabiles statuantur, eritque

$$\partial V = \partial y\, (xx + yy)^n + 2nx\partial x \int \partial y\, (xx + yy)^{n-1}$$

cujus pars posterior signo summatorio affecta ad formam, quam V vocavimus reducitur, ponendo

$$\int \partial y\, (xx + yy)^{n-1} = Ay(xx + yy)^n + B\int \partial y\, (xx + yy)^n$$

ac differentiatione instituta reperietur fore $A = -\frac{1}{2nxx}$ et $B = \frac{2n+1}{2nxx}$ quibus valoribus substitutis positoque $\sqrt{1 - xx}$ loco y habebimus

$$\int \partial y\, (xx + yy)^{n-1} = -\frac{\sqrt{1-xx}}{2nxx} + \frac{2n+1}{2nxx} V$$

Hoc valore substituto habebimus hanc aequationem resolvendam:

$$\partial V = \frac{-\partial x}{x\sqrt{1 - xx}} + (2n + 1)\frac{V\partial x}{x}$$

qua ducta in multiplicatorem x^{-2n-1} fiet integrabilis, prodibitque

$$\int V\partial x = -x^{2n+1} \int \frac{x^{-2n-2}\partial x}{\sqrt{1 - xx}}$$

ut supra §. 5. invenimus, unde pro terminis integrationis stabilitis sequitur fore

$$\int V\partial x \left[\begin{smallmatrix}\text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1\end{smallmatrix}\right] = \frac{\pi}{4(n+1)}.$$

Problema 4.

§. 8. *Manente* $V = \int \partial y\, (xx + yy)^n \left[\begin{smallmatrix}\text{ab } y = 0 \\ \text{ad } y = \sqrt{1 - xx}\end{smallmatrix}\right]$ *investigare integrale* $\int V x \partial x \left[\begin{smallmatrix}\text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1\end{smallmatrix}\right]$.

Solutio.

Cum supra §. 5. invenerimus

$$V = - x^{2n+1} \int \frac{\partial x}{x^{2n+2} \sqrt{1-xx}}$$

manifestum est pro nostro problemate fore

$$\int V x \partial x = - \int x^{2n+2} \partial x \int \frac{\partial x}{x^{2n+2} \sqrt{1-xx}}$$

unde per notissimam reductionem adipiscimur

$$\int V x \partial x = - \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \int \frac{\partial x}{x^{2n+2} \sqrt{1-xx}} + \frac{1}{2n+3} \int \frac{x \partial x}{\sqrt{1-xx}}.$$

Quoniam autem pars prior sponte evanescit posito $x = 0$, altera vero fit $C - \frac{\sqrt{1-xx}}{2n+3}$, constante ita determinata ut etiam haec pars evanescat posito $x = 0$ erit

$$\int V x \partial x \left[\begin{smallmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{2n+3}.$$

Scholion.

§. 9. Simili prorsus modo pro iisdem terminis integrationis inveniri poterunt sequentes integrationes formularum potestatibus tam paribus quam imparibus ipsius x affectarum:

$$\int V x^2 \partial x = \frac{1}{2n+4} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\int V x^3 \partial x = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2n+5}.$$

$$\int V x^4 \partial x = \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{2n+6} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\int V x^5 \partial x = \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{1}{2n+7}.$$

$$\int V x^6 \partial x = \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{2n+8} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\int V x^7 \partial x = \frac{2.4.6}{3.5.7} \cdot \frac{1}{2n+9},$$

et ita porro.

Problema 5.

§. 10. *Si fuerit* $V = \int \partial y \, (x^m + y^m)^n \left[\begin{matrix} \text{ab } y = 0 \\ \text{ad } y = \sqrt[m]{1 - x^m} \end{matrix}\right]$ *invenire integrale* $\int V x^\lambda \partial x \left[\begin{smallmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Solutio.

Statuamus ut supra §. 5. fecimus $y = ux$, eritque $\partial y = x\partial u$ et $x^m + y^m = x^m (1 + u^m)$ et functio proposita fit

$$V = x^{mn+1} \int \partial u\, (1 + u^m)^n \begin{bmatrix} \text{ab } u = 0 \\ \text{ad } u = \frac{\sqrt[m]{1 - x^m}}{x} \end{bmatrix}.$$

Nihil igitur impedit quo minus statim ponamus $u = \frac{\sqrt[m]{1 - x^m}}{x}$, eritque

$$\partial u = - \frac{\partial x}{xx\,(1 - x^m)^{\frac{m-1}{m}}}$$

$$1 + u^m = \frac{1}{x^m}$$

quibus substitutis habebimus

$$V = - x^{mn+1} \int \frac{\partial x\, (1 - x^m)^{\frac{1-m}{m}}}{x^{mn+2}}$$

quod integrale per hypothesin evanescere debet facto $u = 0$, hoc est $x = 1$. Invento jam hoc valore V habebimus

$$\int V x^\lambda \partial x = - \int x^{mn+\lambda+1} \partial x \int \frac{\partial x\, (1 - x^m)^{\frac{1-m}{m}}}{x^{mn+2}}$$

sive reductione ope Lemmatis notissimi facta nanciscimur

$$\int V x^\lambda \partial x = - \frac{x^{mn+\lambda+2}}{mn+\lambda+2} \int \frac{\partial x\, (1 - x^m)^{\frac{1-m}{m}}}{x^{mn+2}}$$

$$+ \frac{1}{mn+\lambda+2} \int \frac{x^\lambda \partial x}{(1 - x^m)^{\frac{m-1}{m}}}$$

ubi prius membrum pro termino integrationis $x = 0$ evanescit, ita ut habeamus

$$\int V x^{\lambda} \partial x = \frac{1}{mn+\lambda+2} \int \frac{x^{\lambda} \partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-1}{m}}}$$

quod integrale pro quolibet exponente λ facile assignari poterit et pro terminis integrationis stabilitis semper constantem habebit valorem. Quod si igitur ponatur

$$\int \frac{x^{\lambda} \partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-1}{m}}} \left[\begin{smallmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{smallmatrix}\right] = \Delta$$

manifestum est fore

$$\int V x^{\lambda} \partial x \left[\begin{smallmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{smallmatrix}\right] = \frac{\Delta}{mn+\lambda+2}.$$

Corollarium 1.

§. 11. Ponatur $\lambda = 0$ et $m = 2$ eritque

$$\Delta = \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}} \left[\begin{smallmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{smallmatrix}\right] = \frac{\pi}{2},$$

ideoque

$$\int V \partial x \left[\begin{smallmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{smallmatrix}\right] = \frac{\pi}{4(n+1)}$$

quemadmodum etiam supra §§. 3, 5 et 7 jam invenimus.

Corollarium 2.

§. 12. Si fuerit $\lambda = m - 1$, erit

$$\Delta = \int \frac{x^{m-1} \partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-1}{m}}} \left[\begin{smallmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{smallmatrix}\right].$$

Statuatur $1 - x^m = z$, eritque $x^{m-1} \partial x = -\frac{\partial z}{m}$ unde intelligitur fore

$$\Delta = + \int \frac{\partial z}{m z^{\frac{m-1}{m}}} \left[\begin{smallmatrix} \text{a } z = 0 \\ \text{ad } z = 1 \end{smallmatrix}\right] = z^{\frac{1}{m}} + C$$

quod cum evanescere debeat casu $z = 0$, fiet $C = 0$, pro altero

vero integrationis termino $z = 1$ fiet $\Delta = 1$, hincque concluditur fore

$$\int V x^{m-1} \partial x \left[\begin{smallmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{1+m(n+1)}$$

Hinc si fuerit $m = 2$ erit

$$\int V x \partial x \left[\begin{smallmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{2n+3}$$

ut supra §. 8. invenimus.

Scholion.

§. 13. Hac problematum, arctissimo inter se vinculo junctorum, serie expedita, aggrediemur aliud formularum integralium duplicatarum genus, cui tractando ansam mihi praebuit formula illa $\iint \partial x \partial y \sqrt{cc - xx - yy}$, cujus valorem Eulerus ab $x = 0$ ad $x = a$ et ab $y = 0$ ad $y = b$ investigare docuit in Tomo XIV Novor. Commentariorum. Sequentia duo problemata exhibebunt valores formularum $\iint \frac{\partial x \partial y}{\sqrt{cc \pm xx \pm yy}}$ pro iisdem terminis integrationis.

Prolema 6.

§. 14. *Proposita formula integrali duplicata* $V = \iint \frac{\partial x \partial y}{\sqrt{cc - xx - yy}}$ *ejus valorem investigare ab* $x = 0$ *ad* $x = a$ *et ab* $y = 0$ *ad* $y = b$ *extensum.*

Solutio.

Sit primo sola y variabilis, eritque

$$V = \int \partial x \int \frac{\partial y}{\sqrt{cc - xx - yy}} \left[\begin{smallmatrix} \text{ab } y = 0 \\ \text{ad } y = b \end{smallmatrix}\right].$$

Facile autem intelligitur fore

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{cc - xx - yy}} = \text{Arc. Sin } \frac{y}{\sqrt{cc - xx}} + C$$

quod cum sponte evanescat sumto $y = 0$, posito pro altero integrationis termino $y = b$, habebimus

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{cc - xx - yy}} \left[\begin{smallmatrix} \text{ab } y = 0 \\ \text{ad } y = b \end{smallmatrix}\right] = \text{Arc. sin } \frac{b}{\sqrt{cc - xx}}$$

et formula proposita fiet

$$V = \int \partial x \,.\, A.\sin \frac{b}{\sqrt{cc - xx}} \left[\begin{matrix}\text{ab } x = 0\\ \text{ad } x = a\end{matrix}\right].$$

Jam per Lemma notissimum $\int P\partial Q = PQ - \int Q\partial P$ erit

$$\int \partial x A.\sin \frac{b}{\sqrt{cc - xx}} = xA.\sin \frac{b}{\sqrt{cc - xx}} - \int \frac{bxx\partial x}{(cc - xx)\sqrt{cc - xx - yy}}$$

quod postremum membrum ita repraesentari potest

$$\int \frac{bxx\partial x}{(cc - xx)\sqrt{cc - xx - yy}} = -\int \frac{b\partial x}{\sqrt{cc - bb - xx}} + \int \frac{bcc\partial x}{(cc - xx)\sqrt{cc - xx - yy}}.$$

Est vero, uti constat,

$$\int \frac{b\partial x}{\sqrt{cc - bb - xx}} = bA.\sin \frac{x}{\sqrt{cc - bb}}$$

Secundum vero membrum, posito $x = c \sin \Phi$, fiet

$$\int \frac{bcc\partial x}{(cc - xx)\sqrt{cc - bb - xx}} = \frac{bc\partial\Phi}{\cos\Phi \sqrt{cc \cos\Phi^2 - bb}}$$

quod ita repraesentari potest:

$$\int \frac{bcc\partial x}{(cc - xx)\sqrt{cc - bb - xx}} = \frac{bc\partial\Phi}{\cos\Phi^2} : \sqrt{cc - \frac{bb}{\cos\Phi^2}}.$$

Quod si nunc ponatur $\operatorname{tg}\Phi = \frac{z}{b}$, erit $\frac{b\partial\Phi}{\cos\Phi^2} = \partial z$, atque $\frac{bb}{\cos\Phi^2} = bb + zz$, ita ut habeamus

$$\int \frac{bcc\partial x}{(cc - xx)\sqrt{cc - bb - xx}} = \int \frac{c\partial z}{\sqrt{cc - bb - zz}}$$

unde cum sit

$$\int \frac{c\partial z}{\sqrt{cc - bb - zz}} = cA.\sin \frac{z}{\sqrt{cc - bb}}$$

collectis omnibus terminis pro formula nostra proposita adepti simus integrale

$$V = xA.\sin \frac{b}{\sqrt{cc - xx}} + bA.\sin \frac{x}{\sqrt{cc - bb}} - cA.\sin \frac{z}{\sqrt{cc - bb}}$$

quod sponte evanescit pro termino integrationis $x = 0$. Sumto autem $x = a$, hoc est $\sin\Phi = \frac{a}{c}$ et $\operatorname{tg}\Phi = \frac{a}{\sqrt{cc - aa}}$ et $z = \frac{ab}{\sqrt{cc - aa}}$, pro terminis integrationis stabilitis fiet

$$V = aA.\sin \frac{b}{\sqrt{cc - aa}} + bA.\sin \frac{a}{\sqrt{cc - bb}} - cA.\sin \frac{ab}{\sqrt{(cc - aa)(cc - bb)}}$$

Problema 7.

§. 15. *Proposita formula integrali duplicata* $V=\iint\frac{\partial x\partial y}{\sqrt{cc+xx+yy}}$ *ejus valorem investigare, si integralia primo ab* $x=0$ *ad* $x=a$ *tum vero ab* $y=0$ *ad* $y=b$ *usque extendantur.*

Solutio.

Spectetur primo sola y ut variabilis, atque habebimus

$$V=\int\partial x\int\frac{\partial y}{\sqrt{cc+xx+yy}}\left[\begin{matrix}\text{ab } y=0\\ \text{ad } y=b\end{matrix}\right].$$

Est vero, uti constat ex Euleri Inst. Calculi integralis Tomo I. Cap. 2. §. 89, si ibi ponatur $\beta=0$, $\alpha=cc+xx$, $\gamma=1$ et $x=y$

$$\int\frac{\partial y}{\sqrt{cc+xx+yy}}=C+l(y+\sqrt{cc+xx+yy})$$

unde, quia pro $y=0$ fit $C=-l\sqrt{cc+xx}$ concluditur fore

$$\int\frac{dy}{\sqrt{cc+xx+yy}}\left[\begin{matrix}\text{ab } y=0\\ \text{ad } y=b\end{matrix}\right]=l\frac{b+\sqrt{cc+bb+xx}}{\sqrt{cc+xx}}$$

ita ut habeamus

$$V=\int\partial x\, l\frac{b+\sqrt{cc+bb+xx}}{\sqrt{cc+xx}}\left[\begin{matrix}\text{ab } x=0\\ \text{ad } x=a\end{matrix}\right].$$

Quod si nunc in subsidium vocetur Lemma illud notissimum,

$$\int P\partial Q=PQ-\int Q\partial P$$

prodibit

$$V=x\,l\frac{b+\sqrt{cc+bb+xx}}{\sqrt{cc+xx}}+\int\frac{bxx\partial x}{(cc+xx)\sqrt{cc+bb+xx}}$$

Cum autem sit

$$\frac{xx\partial x}{(cc+xx)\sqrt{cc+bb+xx}}=\frac{\partial x}{\sqrt{cc+bb+xx}}-\frac{cc\partial x}{(cc+xx)\sqrt{cc+bb+xx}}$$

ob $\int\frac{\partial x}{\sqrt{cc+bb+xx}}=l\cdot\frac{x+\sqrt{cc+bb+xx}}{\sqrt{cc+bb}}$

postrema pars summatoria in valore illo V occurrens erit

$$\int\frac{bxx\partial x}{(cc+xx)\sqrt{cc+bb+xx}}=b\,l\frac{x+\sqrt{cc+bb+xx}}{\sqrt{cc+bb}}-\int\frac{bcc\partial x}{(cc+xx)\sqrt{cc+bb+xx}}$$

Statuatur nunc $x = c.tg\Phi$, ita ut sit $\partial x = \frac{c\partial\Phi}{\cos\Phi^2}$, $cc + xx = \frac{cc}{\cos\Phi^2}$ atque habebimus

$$\int \frac{bcc\partial x}{(cc+xx)\sqrt{cc+bb+xx}} = \int \frac{bc\partial\Phi}{\sqrt{bb+\frac{cc}{\cos\Phi^2}}}$$

quod etiam ita repraesentare licet:

$$\int \frac{bc\partial\Phi}{\sqrt{bb+\frac{cc}{\cos\Phi^2}}} = \int \frac{bc\partial\Phi\cos\Phi}{\sqrt{cc+bb-bb\sin\Phi^2}} = \frac{c}{\sqrt{cc+bb}} \int \frac{b\partial\Phi\cos\Phi}{\sqrt{(1-\frac{bb\sin\Phi^2}{cc+bb})}}$$

quae postrema formula, posito $\frac{b\sin\Phi}{\sqrt{cc+bb}} = z$, abit in

$$c\int \frac{\partial z}{\sqrt{1-zz}} = c\,\mathrm{A}.\sin\frac{b\sin\Phi}{\sqrt{cc+bb}}$$

hincque collectis terminis erit

$$\mathrm{V} = x\,l\,\frac{b+\sqrt{cc+bb+xx}}{\sqrt{cc+xx}} + b\,l\,\frac{x+\sqrt{cc+bb+xx}}{\sqrt{cc+bb}} - c\mathrm{A}.\sin\frac{b\sin\Phi}{\sqrt{cc+bb}}$$

quod sponte evanescit posito $x = 0$. Sumto autem $x = a$, sive $\mathrm{tg}\,\Phi = \frac{a}{c}$ hoc est $\sin\Phi = \frac{a}{\sqrt{aa+cc}}$, habebimus pro terminis integrationis stabilitis

$$\mathrm{V} = a\,l\,\frac{b+\sqrt{cc+bb+aa}}{\sqrt{cc+aa}} + b\,l\,\frac{a+\sqrt{cc+bb+aa}}{\sqrt{cc+bb}}$$
$$- c\mathrm{A}.\sin\frac{ab}{\sqrt{(cc+aa)(cc+bb)}}.$$

Scholion.

§. 16. Hujus postremi problematis solutio quidem tanquam corollarium ex praecedentis solutione deduci potuisset, statuendo $x\sqrt{-1}$ et $y\sqrt{-1}$ loco x et y et imaginarios arcus per notas reductiones ad logarithmos transmutando. Verum solutio directa hic exposita ob egregiam ejus simplicitatem longe anteferenda est illi, quae per tot et tantopere operosas reductiones procedit.

XII.

FORMULARUM QUARUNDAM
INTEGRALIUM IRRATIONALIUM REDUCTIO AD RATIONALITATEM.

Conventui exhibita die 23. Aug. 1826.

§. 1. Cum aliquo abhinc tempore, occasione problematis mechanici, speciem aliquam curvarum synchronarum spectantis, methodum quaererem formulam differentialem irrationalem, elementum temporis exprimentem, rationalem reddendi et integrandi, frustra quidem desudavi, neque ad scopum optatum pertingere mihi licuit. Interim tamen non omnes hujus laboris fructus me perdidisse existimo; varia enim conamina, eum in finem suscepta, viam mihi apperuere plurimas formulas differentiales irrationales, et quidem maxime generales, idonearum substitutionum ope rationales reddendi. Ex problematum a me solutorum serie praecipua, generaliora nempe, hic exhibere eo minus dubito, quod ob defectum methodi universalis formulas differentiales irrationales ad rationalitatem perducendi nihil aliud superest, nisi ut quisque catalogum formularum ad rationalitatem reducibilium pro viribus supplere studeat.

Problema 1.

§. 2. *Denotante i numerum quemcunque, sive integrum, sive fractum, ad rationalitate perducereem formulam:*

$$P = \int \frac{x^{in-1}(\alpha + \beta x^{in})^r \partial x}{(f + g x^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a + b x^{in})^m}}.$$

Solutio.

Ponatur $a + bx^{in} = y^n$, eritque $x^{in-1}\partial x = \frac{y^{n-1}\partial y}{bi}$ et $x^{in} = \frac{y^n - a}{b}$ unde sequitur fore:

$$(\alpha + \beta x^{in})^r = \frac{(\alpha b + \beta(y^n - a))^r}{b^r};$$

$$(f + g x^{in})^\lambda = \frac{(bf + g(y^n - a))^\lambda}{b^\lambda}.$$

quibus in formula proposita substitutis, ea induet sequentem formam

$$P = \frac{b^{\lambda - r - 1}}{i} \int \frac{y^{n-m-1} \partial y \, (\alpha b - \beta a + \beta y^n)^r}{(bf - ag + gy^n)^\lambda}$$

quae formula igitur semper est rationalis, quicunque numerus pro i accipiatur, fractis non exclusis.

Corollarium 1.

§. 3. Sit exempli gratia $i = \frac{1}{2}$ eritque formula proposita rationalis reddenda

$$P = \int \frac{x^{\frac{1}{2}n - 1} (\alpha + \beta x^{\frac{1}{2}n})^r}{(f + g x^{\frac{1}{2}n})^\lambda \sqrt[n]{(a + b x^{\frac{1}{2}n})^m}}$$

quae igitur, ob n numerum integrum quemcunque, maxime est irrationalis. Rationaliter autem erit

$$P = 2 b^{\lambda - r - 1} \int \frac{y^{n-m-1} (\alpha b - \beta a + \beta y^n)^r \partial y}{(bf - ag + gy^n)^\lambda}$$

Corollarium 2.

§. 4. Sit $r = 0$, eritque formula rationalis reddenda:

$$P = \int \frac{x^{in-1} \partial x}{(f + g x^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a + b x^{in})^m}}.$$

formula vero ad rationalitatem perducta ita se habebit:

$$P = \frac{b^{\lambda - 1}}{i} \int \frac{y^{n-m-1} \partial y}{(bf - ag + gy^n)^\lambda}$$

Corollarium 3.

§. 5. Exhibeamus casum exponentibus numericis affectum, statuendo in praecedente corollario $m = 2$, $n = 3$, $i = 1$, $\lambda = 1$, eritque formula reducenda

$$P = \int \frac{x^2 \partial x}{(f + g x^3) \sqrt[3]{a + b x^3}}$$

quae ad rationalitatem perducta hans induet formam:

$$P = \int \frac{\partial y}{bf - ag + gy^2}.$$

Problema 2.

§. 6. *Denotante i numerum quemcunque, sive integrum, sive fractum, ad rationalitatem perducere formulam:*

$$P = \int \frac{x^{im-1} (\alpha + \beta x^{in})^r \partial x}{(f + g x^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a + b x^{in})^m}}.$$

Solutio.

Ponamus $\frac{x^i}{\sqrt[n]{(a + b x^{in})}} = y$, ita ut habeamus $\frac{x^{in}}{a + bx^{in}} = y^n$, sumtisque logarithmis erit

$$n\,ly = in\,lx - l(a + bx^{in})$$

unde sumtis differentialibus fiet

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{ai\partial x}{x(a + bx^{in})}$$

Hinc autem sequitur fore

$$\partial y = \frac{aix^{i-1}\partial x}{(a + b x^{in}) \sqrt[n]{(a + b x^{in})}}$$

ex quo concluditur fore

$$\frac{x^{i-1} \partial x}{\sqrt[n]{a + b x^{in}}} = \frac{(a + b x^{in}) \partial y}{ai}.$$

Est vero $x^{in} = \frac{ay^n}{1 - by^n}$, ideoque

$$a + bx^{in} = \frac{a}{1 - by^n}.$$

unde porro fit

$$\frac{x^{i-1} \partial x}{\sqrt[n]{(a + b x^{in})}} = \frac{\partial y}{i(1 - b y^n)}.$$

Tum vero, quoniam est

$$\frac{x^{im}}{\sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}} = y^m$$

habebimus

$$\sqrt[n]{(a + bx^{in})^m} = \frac{x^{im}}{y^m}$$

unde ob $\frac{\partial x}{x} = \frac{(a+bx^{in})\partial y}{aiy}$ fiet

$$\frac{\partial x}{\sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}} = \frac{y^{m-1}\partial y}{ix^{im-1}(1-by^n)}$$

ideoque

$$\frac{x^{im-1}\partial x}{\sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}} = \frac{y^{m-1}\partial y}{i(1-by^n)}.$$

Cum porro sit

$$x^{in} = \frac{ay^n}{1-by^n}$$

facile intelligitur fore

$$(\alpha + \beta x^{in})^r = \frac{(\alpha-(\alpha b-\beta a)y^n)^r}{(1-by^n)^r}$$

$$(f + gx^{in})^\lambda = \frac{(f-c(bf-ag)y^n)^\lambda}{(1-by^n)^\lambda}$$

his valoribus in formula proposita rite substitutis nanciscimur

$$P = \frac{1}{i}\int\frac{y^{m-1}(\alpha-(\alpha b-\beta a)y^n)^r\partial y}{(1-by^n)^{r-\lambda+1}(f-(bf-ag)y^n)^\lambda}$$

quae igitur rationalis erit, quicquid fuerit i.

Corollarium 1.

§. 7. Sit $r = 0$ et $\alpha = 1$, eritque formula ad rationalitatem perducenda haec:

$$P = \int\frac{x^{im-1}\partial x}{(f+gx^{in})^\lambda\sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}}$$

ipsa vero formula rationalis erit

$$P = \frac{1}{i}\int\frac{y^{m-1}(1-by^n)^{\lambda-1}\partial y}{(f-(bf-ag)y^n)^\lambda}$$

Corolarium 2.

§. 8. Ponatur in superiore Corollario $i = 1$, $\lambda = 1$ $m = 1$, $f = 1$ et $g = 0$, eritque formula irrationalis proposita

$$P = \int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{(a + b x^n)}}$$

formula vero rationalis reddita

$$P = \int \frac{\partial y}{1 - b y^n}$$

Corollarium 3.

§. 9. Quod si reductionem Corollarii 1 (§. 7.) combinemus cum reductione Corollarii 1 praecedentis problematis (§. 4.) reddita erit rationalis formula haec:

$$P = \int \frac{(A x^{in-1} + B x^{im-1}) \partial x}{(f + g x^{in})^{\lambda} \sqrt[n]{(a + b x^{in})^m}}.$$

Scholion 1.

§. 10. Quamvis haec formula ex casibus tantum specialibus formularum generaliorum in problematibus nostris primo et secundo tractatarum sit conflata, ea tamen adeo est generalis, ut tanquam casum specialissimum in se complectatur formulam illam

$$\int \frac{\partial x (1 - x^{n-1})}{(1 - x^n) \sqrt[2n]{2 x^n - 1}},$$

quam Eulerus in Tomo IX. Nov. Actor.pag 112 ad rationalitatem perducere docuit, tanquam formulam irrationalem satis late patentem.

Scholion 2.

§. 11. Formula nostra §. 9. exhibita adeo generalior est illa quam Eulerus in Tomo X. Nov. Act. pag. 17 rationalim reddidit, scilicet

$$\int \frac{(P x^{m-1} + Q x^{n-1})\, \partial x}{\sqrt[n]{(a + b x^n)^m}}$$

denotantibus P et Q functiones formae x^n. In nostra enim P et Q sunt functiones formae $(f + g x^{in})^{-\lambda}$, tum vero numeri m et n in exponentibus ipsius x occurrentes multiplicatorem habent i. Multo adhuc generalior est expressio ex formulis ipsorum problematum nostrorum 1 et 2 composita haec:

$$\int \frac{(A x^{in-1} \pm B x^{im-1})(\alpha + \beta x^{in})^r\, \partial x}{(f + g x^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a + b x^{in})^m}}$$

quae, cum utramque partem rationalem reddiderimus, quoque ad rationalitatem est perducta.

Scholion 3.

§. 12. Quin etiam, si potestates ipsius x in binis factoribus binomialibus fuerint diversae, reductio ad rationalitatem nostrarum formularum succedet adhibitis iisdem substitutionibus, quemadmodum ex solutione sequentium binorum problematum patefiet.

Problema 3.

§. 13. *Ad rationalitatem perducere formulam:*

$$P = \int \frac{x^{in-1} (\alpha + \beta x^{2in})^r\, \partial x}{(f + g x^{\delta in})^\lambda \sqrt[n]{(a + b x^{in})^m}}.$$

Solutio.

Sit ut supra §. 2. statuimus

$a + b x^{in} = y^n$, ita ut $x^{in-1} \partial x = \frac{y^{n-1} \partial y}{bi}$ et

$x^{in} = \frac{y^n - a}{b}$, atque habebimus

$$(\alpha + \beta x^{\varepsilon in})^r = \frac{(\alpha b^\varepsilon + \beta (y^n - a)^\varepsilon)^r}{b^{\varepsilon r}}$$

$$(f + g x^{\delta in})^\lambda = \frac{(f b^\delta + g (y^n - a)^\delta)^\lambda}{b^{\delta \lambda}}$$

quibus substitutis nanciscimur

$$P = \frac{b^{\delta\lambda - \varepsilon r - 1}}{i} \int \frac{y^{n-m-1}(ab^{\varepsilon} + \beta(y^n - a)^{\varepsilon})^r \partial y}{(fb^{\delta} + g(y^n - a)^{\delta})^{\lambda}}$$

Corollarium.

§. 14. Evidens est sumto $\delta = 1$ et $\varepsilon = 1$ hunc casum ad casum problematis primi reduci, quod etiam tenendum est de problemate sequente in quo continebitur casus problematis secundi.

Problema 4.

§. 15. *Ad rationalitatem perducere hanc formulam:*

$$P = \int \frac{x^{im-1}(\alpha + \beta x^{\varepsilon in})^r \partial x}{(f + g x^{\delta in})^{\lambda} \sqrt[n]{(a + b x^{in})^m}}.$$

Solutio.

Ponatur, ut supra §. 6. fecimus,

$$\frac{x^i}{\sqrt[n]{(a + b x^{in})}} = y, \text{ eritque } \frac{x^{in}}{a + b x^{in}} = y^n \text{ et}$$

$$\frac{x^{im-1}\partial x}{\sqrt[n]{(a + b x^{in})^m}} = \frac{y^{m-1}\partial y}{i(1 - by^n)}.$$

Porro cum sit $x^{in} = \frac{ay^n}{1 - by^n}$, erit $x^{\varepsilon in} = \frac{a^{\varepsilon} y^{\varepsilon n}}{(1 - by^n)^{\varepsilon}}$ et $x^{\delta in} = \frac{a^{\delta} y^{\delta n}}{(1 - by^n)^{\delta}}$,

Hinc intelligitur fore

$$(\alpha + \beta x^{\varepsilon in})^r = \frac{(\alpha(1 - by^n)^{\varepsilon} + \beta a^{\varepsilon} y^{\varepsilon n})^r}{(1 - by^n)^{\varepsilon r}}$$

$$(f + g x^{\delta in})^{\lambda} = \frac{f(1 - by^n)^{\delta} + g a^{\delta} y^{\delta n})^{\lambda}}{(1 - by^n)^{\delta\lambda}}$$

quibus substitutis nanciscimur

$$P = \frac{1}{i}\int \frac{y^{m-1}(\alpha(1 - by^n)^{\varepsilon} + \beta a^{\varepsilon} y^{\varepsilon n})^r \partial y}{(1 - by^n)^{\varepsilon r - \delta\lambda + 1}(f(1 - by^n)^{\delta} + g a^{\delta} y^{\delta n})^{\lambda}}$$

Additamentum.

§. 16. Manifestum est formulas generales in praecedentibus problematibus ad rationalitatem perductas innumeros casus specia-

liores in se complecti, quos igitur omnes nunc ab irrationalitate liberare et integrare licebit. Fatendum tamen est dari quoque innumeras alias formas, quae in nostris formulis generalibus non sunt contentae aliasque postulant substitutiones plus minusve donum divinationis exercentes. Haud paucae interea formulae, licet in superioribus non sint contentae, per similes substitutiones rationales fiunt. Harum simpliciores aliquot hic exempli causa exhibebo.

Problema 5.

§. 17. *Ab irrationalitate liberare formulam:*

$$P = \int \frac{(1+x)^2 \partial x}{(3x+x^3)\sqrt[3]{(1+3xx)}}.$$

Solutio.

Statuatur $\frac{1-x}{\sqrt[3]{(1+3xx)}} = p$, sumtisque differentialibus logarithmicis habebimus:

$$\frac{(1+x)^2 \partial x}{(1+x)(1+3xx)} = -\frac{\partial p}{p} \text{ unde fit } \frac{(1+x^2)\partial x}{(1+3xx)\sqrt[3]{(1+3xx)}} = -\partial p.$$

Hinc cum sit $\frac{3x+x^3}{1+3xx} = 1-p^3$ sequitur fore

$$P = \int \frac{(1+x)^2 \partial x}{(3x+x^3)\sqrt[3]{(1+3xx)}} = -\int \frac{\partial p}{1-p^3}.$$

Problema 6.

§. 18. *Ab irrationalitate liberare formulam*

$$P' = \frac{(1-x)^2 \partial x}{(3x+x^3)\sqrt[3]{(1+3xx}}.$$

Solutio.

Ponatur $\frac{1+x}{\sqrt[3]{(1+3xx)}} = q$ et procedendo ut solutione pro-

blematis 5 habebimus

$$\frac{(1-x)^2 \partial x}{(1+3xx)\sqrt[3]{(1+3xx)}} = \partial q\,,\ \frac{3x+x^3}{1+3xx} = -(1-q^3)$$

unde sequitur fore

$$P' = \int \frac{(1-x)^2 \partial x}{(3x+x^3)\sqrt[3]{(1+3xx)}} = -\int \frac{\partial q}{1-q^3}.$$

Corollarium.

§. 19. Haec ambo postrema problemata nobis suppeditant

$$\partial P - \partial P' = \frac{4\,\partial x}{(3+xx)\sqrt[3]{(1+3xx)}}.$$

Hinc autem adipiscimur

$$4\int \frac{\partial x}{(3+xx)\sqrt[3]{(1+3xx)}} = \int \frac{\partial q}{1-q^3} - \int \frac{\partial p}{1-p^3}.$$

Scholion.

§. 20. Reductio ad rationalitatem et integratio formulae in Corollario praecedente rationaliter expressae est argumentum in peculiari dissertatione Tomo X. Novor. Actorum inserta ab Eulero tractatum. Duplex problematis loco citato traditur solutio, quarum prior dat

$$4\int \frac{\partial x}{(3+xx)\sqrt[3]{(1+3xx)}} = \int \frac{\partial q}{1-q^3} - \int \frac{\partial p}{1-p^3}$$

quemadmodum etiam nostrum Corollarium habet. Ipsum integrale hic non exhibeo, ideo quod ab Eulero jam traditum fuit et quod in hac dissertatiuncula tantum de liberatione ab irrationalitate agitur.

XIII.

TENTAMEN

SOLUTIONIS PROBLEMATIS GEOMETRICI MAXIME ARDUI.

Conventui exhibita die 23. Aug. 1826.

§. 1. Considero linteum figuram habens parallelogrammi
Fig. 11. rectanguli ABCD, plano horizontali impositum, cujus bina latera AB et AC firmier plano affixa concipiantur, latus vero CD baculo annexum, qui circa punctum C, tanquam fixum, elevari queat.

§. 2. Elevetur igitur iste baculus in situm Cd, ad angulum quem vocemus $DCd = \zeta$, et quaeratur figura et superficies lintei in hoc situ, assumendo scilicet fila, ex quibus linteum textum est, tam extensionem quam contractionem pati.

Investigatio figurae.

§. 3. Statuatur $AB = a$, $AC = b$ et pro filo longitudinali quocunque tzT sit $AT = Ct = t$. Sit z punctum aliquod hujus fili, pro quo statuantur ternae coordinatae $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$; demissoque ex t in rectam CD perpendiculo tv habebimus

$$tv = t \sin \zeta \quad \text{et} \quad Cv = t \cos \zeta.$$

Fig. 12. §. 4. Quodsi nunc per puncta t et Z, nec non per v et Y ductae concipiantur rectae tT et vT in T concurrentes, tum vero per v recta vQ lateri CA parallela, erit

$$tv : YZ = Tv : TY$$
$$Tv : TY = Qv : QP$$
$$Qv : QP = AC : AX$$

unde sequitur fore

$$tv : YZ = AC : AX$$

ita ut habeamus

$$YZ = z = \frac{tx \sin\zeta}{b}$$

unde concluditur fore

$$t = \frac{bz}{x \sin\zeta}.$$

§. 5. Quod si nunc per y agatur recta yR lateri CA parallela, orietur proportio:

$$TQ : Qv = TR : RY$$

sive introducendo valores linearum, haec:

$$t - t\cos\zeta : b = t - y : x$$

unde sequitur fore

$$y = \frac{t(b - x + x\cos\zeta)}{b}$$

§. 6. Sumatur intervallum AT $= t$ constans et prodit aequatio hujus formae

$$y = A - Bx$$

pro linea recta. Hinc intelligitur si per filum longitudinale quodcunque TZt (fig. 1) planum transire concipiatur, ejus sectionem cum plano tabulae fore lineam rectam TYv (fig. 2).

§. 7. In aequatione §. 5. inventa loco t scribatur ejus valor ex §. 4. $t = \frac{bz}{x \sin\zeta}$, eritque

$$y = \frac{z(b - x + x\cos\zeta)}{x \sin\zeta}$$

unde sumto x constante prodit aequatio formae

$$y = Mz - N$$

pro linea recta. Hinc discimus si per punctum quodcunque X sectio fiat plano tabulae normalis, sectionem cum nte o fore lineam rectam ZX.

§. 8. Quod si autem $XY = y$ constans assumatur, ex aequatione $y = \frac{z(b - x + x\cos\zeta)}{x\sin\zeta}$ sequitur aequatio hujus formae:

$$z = \frac{fx}{g - hx}$$

Si igitur per punctum Y secundum lineam YZ, in quolibet sensu, fiat intersectio, sectio cum linteo erit hyperbola.

§. 9. Si denique in eadem expressione supra pro y inventa statuatur $YZ = z$ constans, tum prodit aequatio formae

$$y = \frac{m - nx}{kx}$$

unde patet, si planum concipiatur, plano tabulae parallelum, per punctum Z transiens, ejus sectionem cum linteo quoque fore hyperbolam. Haec sunt quae de figura lintei monenda habuimus.

Investigatio Superficiei.

§. 10. Consideretur elementum areale in plano horizontali
Fig. 13. $YY'y'y$, in quo elemento $Xx = \partial x$ constante, ob

$$Yy = \partial y = \frac{\partial t(b - bx + x\cos\zeta)}{b} \quad (§.\ 5.)$$

habebimus

$$YY'y'y = \partial x\partial y = \frac{\partial x\partial t(b - bx + x\cos\zeta)}{b} = \frac{y\partial x\partial t}{t}.$$

Nunc quaeratur elementum superficiei lintei huic elemento $YY'y'y$ imminens, scilicet $ZZ'z'z$, quod invenitur si elementum $YY'y'y$ multiplicetur per secantem inclinationis elementi $ZZ'z'z$ ad planum horizontale.

§. 11. Quo hanc secantem investigare queamus ducamus in
Fig. 14. figura 11 ma rectam XT, in eamque ex Y demittamus perpendiculum YS, junctisque punctis Z et S recta ZS erit angulus YSZ inclinatio plani XZT superficiem lintei tangentis in puncto Z. Secans autem hujus inclinationis quaesita erit $\frac{ZS}{YS}$ et elementum super-

ficiei lintei quaesita ita prodit expressa:

$$ZZ'z'z = YY'y'y \times \frac{ZS}{YS}.$$

§. 12. Jam cum sit triangulum XAT simile triangulo YSX, manifestum est fore

$$XT : XA = YX : YS$$

unde concluditur fore.

$$YS = \frac{XA \cdot YX}{XT} = \frac{xy}{\sqrt{(tt+xx)}}$$

Hinc autem deducitur:

$$ZS = \sqrt{(YZ^2 + YS^2)} = \frac{\sqrt{(zz(tt+xx)+xxyy)}}{tt+xx}$$

unde porro naciscimur:

$$\frac{ZS}{YS} = \frac{\sqrt{(zz(tt+xx)+xxyy)}}{xy}$$

ita ut, substituto in numeratore loco y valore supra §. 7. invento, habeamus:

$$\frac{ZS}{YS} = \frac{1}{xy}\sqrt{\left(ttzz + xxzz + xxzz\frac{(b-x+x\cos\zeta)^2}{xx\sin\zeta^2}\right)}:$$

Est vero $xx\sin\zeta^2 = \frac{bbzz}{tt}$ et $xxzz = \frac{ttx4\sin\zeta^2}{bb}$ quibus substitutis nanciscimur

$$\frac{ZS}{YS} = \frac{1}{xy}\sqrt{\left(ttzz + \frac{ttxx}{bb}(bb - 2x(b-x)(1-\cos\zeta)\right)}.$$

§. 13. Cum igitur supra §. 11. invenerimus

$$ZZ'z'z = YY'y'y \times \frac{ZS}{YS}$$

ex §. 10. vero sit

$$YY'y'y = \frac{y\partial x\partial t}{t}$$

superficies lintei quaesita erit

$$ZZ'z'z = \frac{\partial x\partial t}{b}\sqrt{\left(\frac{bbzz}{xx} + bb - 2x(b-x)(1-\cos\zeta)\right)}$$

sive ob $\frac{bz}{x} = t\sin\zeta$ erit

$$ZZ'z'z = \frac{\partial x\partial t}{b}\sqrt{(tt\sin\zeta^2 + bb - 2x(b-x)(1-\cos\zeta))}.$$

§. 14. Hic igitur duplici integratione opus est, altera pro variabilitate solius x, altera pro variabilitate solius t, priore ab $x = 0$ ad $x = b$, posteriore ab $t = 0$ ad $t = a$ extensa. Quodsi igitur statuatur

$$\int \frac{\partial x}{b} \sqrt{(tt \sin \zeta^2 + bb - 2x(b-x)(1-\cos\zeta))} \left[\begin{smallmatrix} \text{ab} & x=0 \\ \text{ad} & x=b \end{smallmatrix}\right] = T$$

tum tota superficies quaesita, quam vocemus S, erit

$$S = \int T \partial t \left[\begin{smallmatrix} \text{a} & t=0 \\ \text{ad} & t=a \end{smallmatrix}\right].$$

§. 15. Ponatur jam $x = \frac{b+v}{2}$ et $\zeta = 2\theta$ atque habebimus

$$T = \int \frac{\partial v}{2b} \sqrt{(tt \sin 2\theta^2 + bb \cos\theta^2 + vv \sin\theta^2)} \left[\begin{smallmatrix} \text{a} & v=-b \\ \text{ad} & v=+b \end{smallmatrix}\right].$$

Quia nunc hic sola v ut variabilis spectatur, ponatur brevitatis gratia $tt \sin 2\theta^2 + bb \cos\theta^2 = A$, eritque

$$T = \int \frac{\partial v}{2b} \sqrt{(A + vv \sin\theta^2)} \left[\begin{smallmatrix} \text{a} & v=-b \\ \text{ad} & v=+b \end{smallmatrix}\right].$$

Quodsi nunc actu integretur, habebimus primo

$$T = \frac{v}{4b} \sqrt{(A + vv \sin\theta^2)} + \frac{A}{4b} \int \frac{\partial v}{\sqrt{(A + vv \sin\theta^2)}}.$$

Tum vero, quoniam est

$$\int \frac{\partial v}{\sqrt{(A + vv \sin\theta^2)}} = \frac{1}{\sin\theta}\, l\left(v \sin\theta + \sqrt{(A + vv \sin\theta^2)}\right)$$

integrale quaesitum erit

$$T = C + \frac{v}{4b} \sqrt{(A + vv \sin\theta^2)} + \frac{A}{4b \sin\theta}\, l\left(v \sin\theta + \sqrt{(A + vv \sin\theta^2}\right.$$

dum scilicet sumatnr a $v = -b$ usque ad $v = +b$.

§. 16. Quoniam igitur, sumto $v = -b$ fieri debet $T = 0$ erit constans per integrationem ingressa

$$C = +\tfrac{1}{4}\sqrt{(A + bb \sin\theta^2)} - \frac{A}{4b \sin\theta}\, l\left(\sqrt{(A + bb \sin\theta^2)} - b \sin\theta\right)$$

ita ut habeamus

$$T = \left\{ \begin{matrix} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(A + bb \sin\theta^2)} \\ + \frac{v}{4b}\sqrt{(A + vv \sin\theta^2)} \end{matrix} + \frac{A}{4b \sin\theta}\, l\, \frac{\sqrt{(A + vv \sin\theta^2)} + v \sin\theta}{\sqrt{(A + bb \sin\theta^2)} - b \sin\theta} \right\}$$

Quod si nunc ponatur, pro altero integrationis termino, $v = + b$, fiet

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{(A + bb \sin \theta^2)} + \frac{A}{4b \sin \theta} l \frac{\sqrt{(A + bb \sin \theta^2)} + b \sin \theta}{\sqrt{(A + bb \sin \theta^2)} - b \sin \theta}$$

sive, restituto loco A suo valore, erit:

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{(tt \sin 2\theta^2 + bb)} + \frac{tt \sin 2\theta + bb \cos \theta^2}{4b \sin \theta} l \frac{\sqrt{(tt \sin 2\theta^2 + bb)} + b \sin \theta}{\sqrt{tt \sin 2\theta^2 + bb} - b \sin \theta}.$$

§. 17. Vocetur nunc brevitatis gratia

$$\frac{1}{2} \sqrt{(tt \sin 2\theta^2 + bb)} = P$$

$$\frac{tt \sin 2\theta^2 + bb \cos \theta^2}{4b \sin \theta} l \frac{\sqrt{(tt \sin 2\theta^2 + bb)} + b \sin \theta}{\sqrt{(tt \sin 2\theta^2 + bb)} - b \sin \theta} = Q$$

eritque superficies quaesita

$$S = \int P \partial t + \int Q \partial t \left[{}^{a}_{ad} \; {}^{t = 0}_{t = a}\right].$$

Hic quidem integrale prius $\int P \partial t$ facile assignare licet. Erit enim, a $t = 0$ ad $t = a$ extensum

$$\int P \partial t = \begin{cases} \frac{a}{4} \sqrt{(aa \sin 2\theta^2 + bb} \\ + \frac{bb}{4 \sin 2\theta} l \frac{a \sin 2\theta + \sqrt{(aa \sin 2\theta^2 + bb)}}{a} \end{cases}$$

§. 18. Postremum autem integrale in expressione superficiei S occurrens

$$\int Q \partial t \left[{}^{a}_{ad} \; {}^{t = 0}_{t = a}\right] = \int \partial t \left(\frac{tt \sin 2\theta^2 + bb \cos \theta^2}{4b \sin \theta}\right) l \frac{\sqrt{(tt \sin 2\theta^2 + bb)} + b \sin \theta}{\sqrt{(tt \sin 2\theta^2 + bb)} - b \sin \theta}$$

non nisi per calculos valde perplexos investigari poterit, meaque tentamina integrationem perficiendi omnia hucusque vana irritaque mansere. Ceterum evidens est expressionem maxime fore transcendentem et non solum logarithmos, sed etiam arcus circulares involvi.

§. 19. Casus autem quo latitudo lintei prae longitudine est valde parva ita ut altiores potestates ipsius t negligi queant, satis commode evolvitur. Erit enim

$$P = \frac{b}{2} + \frac{tt}{4b} \sin 2\theta^2$$

$$Q = \frac{b \cos \theta^2}{4 \sin \theta} \left(1 + \frac{4tt}{bb} \sin \theta^2\right) R$$

$$R = l \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$$

unde fit superficies

$$S = \frac{bt}{2} + \frac{bt \cos \theta^2}{4 \sin \theta} l \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}.$$

§. 20. Sit angulus, ad quem baculus CD elevatur, $\zeta = 60°$, ita ut $\theta = 30$ erit superficies

$$S = \frac{bt}{2}(1 + \tfrac{3}{4} l\, 3) = 0{,}9119796\, bt.$$

Fig. 1.

Fig. 6.

Fig. 5.

Fig. 9.

Fig. 13.

Fig. 11.

Fig. 12.



